

Nom :
Prénom :

DEVOIR SURVEILLÉ N°7

Mathématiques - Calculatrice autorisée

Exercice 1. SUITES RÉCURRENTES ET FONCTIONS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}.$$

On définit $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note \mathcal{C}_f son graphe.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .
2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.
3. En utilisant \mathcal{C}_f et la première bissectrice, placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. On complètera le graphe fourni en annexe et on laissera apparaître les traits de construction.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

7. Calculer v_0 et v_1 .
8. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
9. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Retrouver le résultat de la question 6.

Exercice 2. LES SUITES - EXTRAIT D'UN SUJET CONCOURS

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(E_n) : \quad \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

où n est un entier strictement positif, et x , l'inconnue, est un nombre réel supérieur ou égal à 1.

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

11. Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$.
12. Dresser le tableau de variations de f sur le domaine $[1; +\infty[$.
13. En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution dans $[1; +\infty[$.
14. Démontrer que pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, que l'on notera α_n et β_n , telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

Dans la suite, on s'intéresse à la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$.

15. Sur le graphe fourni en annexe, représenter α_n pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$?
16. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.
17. Pour tout $n \geq 2$, on pose $x_n = \alpha_n - 1$. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.