

Nom :
Prénom :

DEVOIR SURVEILLÉ N°7 - Correction

Mathématiques

Exercice 1. SUITES RÉCURRENTES ET FONCTIONS

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}.$$

On définit $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ sur l'intervalle $[0, 1]$. On note \mathcal{C}_f son graphe.

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Pour tout $x \in [0, 1]$, $f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) \in [0, 1]$.

La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0, 1]$,

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \quad \forall x \in [0, 1].$$

Ainsi pour $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

3. En utilisant \mathcal{C}_f et la première bissectrice, placer les quatre premiers termes de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses. On complètera le graphe fourni en annexe et on laissera apparaître les traits de construction.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

On procède par récurrence. On a bien $0 \leq u_0 \leq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \in [0, 1]$, alors $f(u_n) \in [0, 1]$ d'après la question précédente, c'est-à-dire $u_{n+1} \in [0, 1]$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{u_n + 3} - u_n \\ &= -\frac{u_n^2 + u_n}{u_n + 3} \\ &= -\frac{u_n(u_n + 1)}{u_n + 3} \leq 0, \end{aligned}$$

car $u_n \in [0, 1]$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

6. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 3}$. On obtient par passage à la limite, $\ell = \frac{2\ell}{\ell + 3}$, donc $\ell^2 + 3\ell = 2\ell$ donc $\ell(\ell + 1) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = -1$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$, donc $\ell = 0$

Conclusion : $\lim u_n = \ell = 0$.

On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}.$$

7. Calculer v_0 et v_1 .
 $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_1 = \frac{1}{3}$.

Nom :
Prénom :

8. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et déterminer l'expression de v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{2u_n}{u_n + 3}}{\frac{2u_n}{u_n + 3} + 1} = \frac{2u_n}{3u_n + 3} = \frac{2}{3} \frac{u_n}{u_n + 1} = \frac{2}{3} v_n.$$

Conclusion : La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

9. En déduire l'expression explicite de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On sait que $v_n = \frac{u_n}{u_n + 1}$, donc $v_n u_n - u_n = -v_n$, donc $u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}$.

10. Retrouver le résultat de la question 6.

$$\lim \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{2}{3} < 1, \text{ d'où } \lim u_n = \frac{0}{1 - 0} = 0.$$

Exercice 2. LES SUITES - EXTRAIT D'UN SUJET CONCOURS

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(E_n) : \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

où n est un entier strictement positif, et x , l'inconnue, est un nombre réel supérieur ou égal à 1.

Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par :

$$\forall x \in [1; +\infty[, \quad f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

11. Montrer que $\forall x \in [1; +\infty[, f'(x) = \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}$.

Les fonctions $x \mapsto \ln^2(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $[1; +\infty[$ et $x \mapsto x$ ne s'annule pas sur ce domaine, donc f est dérivable sur $[1; +\infty[$ (quotient de

fonctions dérivables).

Pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\ln^2(x)]' \times x - \ln^2(x) \times 1}{x^2} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{x} \ln(x) \times x - \ln^2(x)}{x^2} \\ &= \frac{2 \ln(x) - \ln^2(x)}{x^2} \\ &= \frac{\ln(x)(2 - \ln(x))}{x^2}. \end{aligned}$$

12. Dresser le tableau de variations de f sur le domaine $[1; +\infty[$.

Soit $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 0$ ou $2 - \ln(x) = 0 \iff x = 1$ ou $x = e^2$.

De plus, $f(1) = 0$, $f(e^2) = \frac{2^2}{e^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ par croissances comparées.

13. En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution dans $[1; +\infty[$.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $0 \leq f(x) \leq \left(\frac{2}{e}\right)^2 < 1$, donc l'équation $(E_1) : f(x) = 1$ n'admet pas de solution dans $[1; +\infty[$.

14. Démontrer que pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, que l'on notera α_n et β_n , telles que :

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

Soit $n \geq 2$, alors $f : [1, e^2] \rightarrow \left[0, \left(\frac{2}{e}\right)^2\right]$ réalise une bijection (car continue et strictement croissante). Comme $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} < \left(\frac{2}{e}\right)^2$, on a $\frac{1}{n} \in \left[0, \left(\frac{2}{e}\right)^2\right]$ et il existe un unique $\alpha_n \in [1, e^2]$ tel que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$. De même, $f : [e^2; +\infty[\rightarrow \left[0, \left(\frac{2}{e}\right)^2\right]$ réalise une bijection et comme $\frac{1}{n} \in \left[0, \left(\frac{2}{e}\right)^2\right]$, il existe un unique $\beta_n \in [e^2; +\infty[$ tel que $f(\beta_n) = \frac{1}{n}$. Ainsi (E_n) admet

Nom :
Prénom :

exactement deux solutions et

$$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$

Dans la suite, on s'intéresse à la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$.

15. Sur le graphe fourni en annexe, représenter α_n pour $n \in \{2, 3, 4, 5\}$. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$?

Conjecture : La suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante.

16. Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.

La fonction $f : [1, e^2] \rightarrow \left[0, \left(\frac{2}{e}\right)^2\right]$ est bijective et strictement croissante,

donc $f^{-1} : \left[0, \left(\frac{2}{e}\right)^2\right] \rightarrow [1, e^2]$ l'est également. Pour tout $n \geq 2$, on a

$0 \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq \left(\frac{2}{e}\right)^2$ et donc $f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ soit $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ pour tout $n \geq 2$. La suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est donc décroissante. Étant de plus minorée par 1, la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ converge vers ℓ (d'après le théorème de la limite monotone).

On sait que pour tout $n \geq 2$, $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$. On obtient, par passage à la limite $f(\ell) = 0$, donc $\ell = 1$.

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$.

17. Pour tout $n \geq 2$, on pose $x_n = \alpha_n - 1$. Donner un équivalent de x_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$. On sait que $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 2$, donc $f(1+x_n) = \frac{1}{n}$ soit

$$\frac{\ln(1+x_n)^2}{1+x_n} = \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 2.$$

Ainsi $\frac{x_n^2}{1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ (car $\lim x_n = 0$), et on obtient

$$x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$