

NOM :
Prénom :

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 – Mathématiques

Calculatrice interdite – Durée : 2 heures

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient

$$A(X) = 2X^7 - 4X^6 + 10X^5 + X^2 + 4 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 - 2X + 5.$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$. On note $Q(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste de cette division euclidienne.
2. Quelle relation lie les polynômes $A(X)$, $B(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$?
3. Calculer $B(1 + 2i)$.
4. En déduire $A(1 + 2i)$. On utilisera les résultats des questions précédentes.

Exercice 2. MATRICES, POLYNÔMES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Inverse de la matrice A

5. Calculer A^2 . On détaillera les calculs effectués.
6. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI$.
7. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I - A)$.

Puissances de la matrice A – Méthode 1

- On note $P(X) = X^2 - 5X + 4$.
8. Déterminer les racines de $P(X)$ et factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ et $Q(X)$ son quotient.
9. Écrire la relation liant les polynômes X^n , $P(X)$, $R(X)$ et $Q(X)$.
 10. Déterminer $R(X)$.
 11. En déduire une expression de A^n en fonction de I , de A et de n .
 12. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Puissances de la matrice A – Méthode 2

13. On pose $J = A - I$.
Calculer J et J^2 . En déduire que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.
15. En appliquant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = I + \frac{1}{3}(4^n - 1)J.$$

Puissances de la matrice A – Méthode 3 On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .
17. Montrer que $AP = PD$. On détaillera les calculs effectués.
18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
19. Expliciter les neuf coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note $\mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM - MA = \mathbf{0}_3\}.$$

20. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$M(a, b) = aI + bA = \begin{pmatrix} a + 4b & 3b & 3b \\ 3b & a + 4b & 3b \\ -3b & -3b & a - 2b \end{pmatrix}$$

et

$$\Delta(a, b) = P^{-1} \times M(a, b) \times P.$$

21. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que la matrice $\Delta(a, b)$ est une matrice diagonale dont on explicitera les coefficients.

On note

$$G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = I\}.$$

22. L'espace G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?
23. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$M(a, b)^2 = I \iff \Delta(a, b)^2 = I.$$

24. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M(a, b) \in G$.