

DEVOIR SURVEILLÉ N°8 – Mathématiques

Correction

Exercice 1. DIVISION EUCLIDIENNE DE POLYNÔMES

Soient

$$A(X) = 2X^7 - 4X^6 + 10X^5 + X^2 + 4 \quad \text{et} \quad B(X) = X^2 - 2X + 5.$$

1. Effectuer la division euclidienne de $A(X)$ par $B(X)$. On note $Q(X)$ le quotient et $R(X)$ le reste de cette division euclidienne.
2. Quelle relation lie les polynômes $A(X)$, $B(X)$, $Q(X)$ et $R(X)$?
3. Calculer $B(1 + 2i)$.
4. En déduire $A(1 + 2i)$. On utilisera les résultats des questions précédentes.

1. $A(X) = B(X) \times Q(X) + R(X)$ avec $Q(X) = 2X^5 + 1$ et $R(X) = 2X - 1$.
2. cf résultat précédent.
3. $B(1 + 2i) = (1 + 2i)^2 - 2(1 + 2i) + 5 = 1 + 4i - 4 - 2 - 4i + 5 = 0$.
4. $A(1 + 2i) = B(1 + 2i) \times Q(1 + 2i) + R(1 + 2i) = R(1 + 2i) = 2(1 + 2i) - 1 = 1 + 4i$.

Exercice 2. MATRICES, POLYNÔMES ET SOUS-ESPACES VECTORIELS

On note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Inverse de la matrice A

5. Calculer A^2 . On détaillera les calculs effectués.

Correction. $A^2 = \begin{pmatrix} 16 & 15 & 15 \\ 15 & 16 & 15 \\ -15 & -15 & -14 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI$.

Correction. $A^2 = 5A - 4I$.

7. En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I - A)$.

Correction. $A^2 = 5A - 4I$ donc $4I = 5A - A^2$ donc $I = \frac{1}{4}(5I - A)A$, or $I = A^{-1}A$. On en déduit que $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I - A)$ par unicité de l'inverse de A .

Puissances de la matrice A – Méthode 1

On note $P(X) = X^2 - 5X + 4$.

8. Déterminer les racines de $P(X)$ et factoriser $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction. $P(X) = (X - 1)(X - 4)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $R(X)$ le reste de la division euclidienne de X^n par $P(X)$ et $Q(X)$ son quotient.

9. Écrire la relation de division euclidienne liant les polynômes X^n , $P(X)$, $R(X)$ et $Q(X)$.

Correction. $X^n = P(X)Q(X) + R(X)$ et $\deg(R(X)) < \deg(P(X))$.

10. Déterminer $R(X)$.

Correction. On sait que $\deg(R(X)) < 2$ donc $R(X) = \alpha X + \beta$ avec α et β deux réels à déterminer.

De plus $1^n = P(1)Q(1) + R(1)$ (donc $\alpha + \beta = 1$) et $4^n = P(4)Q(4) + R(4)$ (donc $4\alpha + \beta = 4^n$).

Ainsi $\alpha = \frac{1}{3}(4^n - 1)$ et $\beta = \frac{1}{3}(4 - 4^n)$.

Conclusion : $R(X) = \alpha X + \beta = \frac{1}{3}(4^n - 1)X + \frac{1}{3}(4 - 4^n)$.

11. En déduire une expression de A^n en fonction de I , de A et de n .

Correction. On a $A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$ d'après la question 7.

Conclusion : $A^n = \frac{1}{3}(4^n - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^n)I$.

12. Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Correction. Lorsque $n = -1$: $\frac{1}{3}(4^n - 1)A + \frac{1}{3}(4 - 4^n)I = -\frac{1}{4}A + \frac{5}{4}I = \frac{1}{4}(5I - A) = A^{-1}$.

La formule est donc encore valable pour $n = -1$.

Puissances de la matrice A – Méthode 2

13. On pose $J = A - I$.

Calculer J et J^2 . En déduire que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Correction. $J = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$ et $J^2 = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ -9 & -9 & -9 \end{pmatrix} = 3J$.

Démonstration par récurrence : La propriété est vérifiée pour $k = 1$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $J^k = 3^{k-1}J$, alors $J^{k+1} = J^k \times J = 3^{k-1}J \times J = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \times 3J = 3^k J$. Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $J^k = 3^{k-1}J$.

14. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3}(4^n - 1)$.

Correction. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{3}(4^n - 1) = \frac{1}{3}((3+1)^n - 1) = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k - 1 \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1}$.

15. En appliquant la formule du binôme de Newton, montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = I + \frac{1}{3}(4^n - 1)J.$$

Correction. Comme $I \times J = J = J \times I$, on a

$$\begin{aligned} A^n &= (J + I)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k \\ &= \binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} J^k \\ &= I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} J && \text{(d'après Q13)} \\ &= I + J \times \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} \\ &= I + \frac{1}{3}(4^n - 1)J. && \text{(d'après Q14)} \end{aligned}$$

Puissances de la matrice A – Méthode 3 On note

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

16. Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1} .

Correction. $\det(P) = 1 \neq 0$ donc P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

17. Montrer que $AP = PD$. On détaillera les calculs effectués.

Correction. $AP = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3-3 & 4-3+0 & 4+0-3 \\ 3+4-3 & 3-4+0 & 3+0-3 \\ -3-3+2 & -3+3+0 & -3+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+0+0 & 0+1+0 & 0+0+1 \\ 4+0+0 & 0-1+0 & 0+0+0 \\ -4+0+0 & 0+0+0 & 0+0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ donc } AP =$$

PD .

18. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^n P^{-1}$.

Correction. On note $H(n) : \ll A^n = PD^n P^{-1} \gg$. Comme $AP = PD$, on a $A = PDP^{-1}$ et $H(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $H(n)$ vraie. Alors $A^{n+1} = A \times A^n = APD^n P^{-1} = PDD^n P^{-1} = PD^{n+1} P^{-1}$ et $H(n+1)$ est vraie. Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PD^n P^{-1} = P \text{diag}(4^n, 1, 1) P^{-1}$.

19. Expliciter les neuf coefficients de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire une expression de A , puis de A^n en fonction de P , P^{-1} , D et n .

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} = P\text{diag}(4^n, 1, 1)P^{-1}. \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^n & 1 & 1 \\ 4^n & -1 & 0 \\ -4^n & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4^n & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n & 4^n - 1 \\ -4^n + 1 & -4^n + 1 & -4^n + 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

On note $\mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et

$$F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM - MA = \mathbf{0}_3\}.$$

20. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
- $\mathbf{0}_3 \in F$ car $A \times \mathbf{0}_3 = \mathbf{0}_3 = \mathbf{0}_3 \times A$.
- Soient $M, N \in F$. On a

$$A(M + N) - (M + N)A = AM + AN - MA - NA = (AM - MA) + (AN - NA) = \mathbf{0}_3 + \mathbf{0}_3 = \mathbf{0}_3,$$

donc $M + N \in F$.

- Soient $M \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$A(\lambda M) - (\lambda M)A = \lambda AM - \lambda MA = \lambda(MA - AM) = \lambda \times \mathbf{0}_3 = \mathbf{0}_3,$$

donc $\lambda M \in F$.

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On note

$$M(a, b) = aI + bA = \begin{pmatrix} a + 4b & 3b & 3b \\ 3b & a + 4b & 3b \\ -3b & -3b & a - 2b \end{pmatrix}$$

et

$$\Delta(a, b) = P^{-1} \times M(a, b) \times P.$$

21. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que la matrice $\Delta(a, b)$ est une matrice diagonale dont on explicitera les coefficients.

Correction. On a

$$\begin{aligned}\Delta(a, b) &= P^{-1}M(a, b)P \\ &= P^{-1}(aI + bA)P \\ &= aP^{-1}IP + bP^{-1}AP \\ &= aI + bD \\ &= \begin{pmatrix} a + 4b & 0 & 0 \\ 0 & a + b & 0 \\ 0 & 0 & a + b \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On note

$$G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid M^2 = I\}.$$

22. L'espace G est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Correction. Non, car $\mathbf{0}_3 \notin G$.

23. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$M(a, b)^2 = I \iff \Delta(a, b)^2 = I.$$

Correction. On a

$$\begin{aligned}\Delta(a, b)^2 = I &\iff (P^{-1}M(a, b)P)^2 = I \\ &\iff P^{-1}M(a, b)PP^{-1}M(a, b)P = I \\ &\iff P^{-1}M(a, b)^2P = I \\ &\iff M(a, b)^2 = PIP^{-1} \\ &\iff M(a, b)^2 = I\end{aligned}$$

24. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M(a, b) \in G$.

Correction. On a

$$\begin{aligned}M(a, b) \in G &\iff M(a, b)^2 = I \\ &\iff D(a, b)^2 = I \\ &\iff \begin{pmatrix} (a + 4b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a + b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a + b)^2 \end{pmatrix} = I \\ &\iff \begin{cases} (a + 4b)^2 = 1 \\ (a + b)^2 = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + 4b = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a + 4b = 1 \\ a + b = -1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a + 4b = -1 \\ a + b = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a + 4b = -1 \\ a + b = -1 \end{cases} \\ &\iff (a, b) = (1, 0) \text{ ou } (a, b) = (-5/3, 2/3) \text{ ou } (a, b) = (5/3, -2/3) \text{ ou } (a, b) = (-1, 0).\end{aligned}$$