Programme de colles n°14
Du 12/01 au 16/01

Reprise du programme précédent (géométrie du plan, méthodes de démonstration) + Équations différentielles (sans changement de variables, avec indications dans le cas d'un passage dans $\mathbb{C}$).

1 Équations différentielles

1.1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

$$y' + a(x)y = b(x),$$

où a et b sont des fonctions, à valeurs réelles ou complexes, définies et continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Capacités :

- Résoudre l'équation homogène associée.
- Utiliser la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière.
- Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation.
À ce stade, la résolution ne doit pas faire appel à un changement de variable.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

1.2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(x),$$

où a, b, c sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Capacités :

- Résoudre l'équation homogène associée.
- Déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $Qe^{\gamma x}$ avec $(Q, \gamma) \in \mathbb{C}^2$.
- AVEC AIDE : Passage dans $\mathbb{C}$ pour déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre faisant intervenir des fonctions trigonométriques : $f(x) = Q\sin(\gamma x)$ ou $f(x) = Q\cos(\gamma x)$.
Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre.
- Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Documents utilisés en classe

Cours : cours10.pdf

TD : TD10.pdf

Applications du cours

Question 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$\left(1+x^2\right)^2 y' + 2x\left(1+x^2\right)y = 1.$$

Question 2. Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f : \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\arcsin(x) + C}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

sont solutions.

Question 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 4y = e^{2x}.$$