

Programme de colles n°21

Du 16/03 au 20/03

Calcul matriciel & Polynômes

Calcul matriciel : Reprise du programme de colles précédent

Polynômes

1. POLYNÔMES À UNE INDÉTERMINÉE

Ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .

Opérations : somme, produit, composée.

Degré d'un polynôme

(Par convention, le degré du polynôme nul vaut $-\infty$).

Coefficient dominant. Polynôme unitaire.

Degré d'une somme et d'un produit :

$$\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$$

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$$

Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .

Fonction polynomiale associée à un polynôme.

2. BASES DE L'ARITHMÉTIQUE DANS $\mathbb{K}[X]$

Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples.

Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$:

Soient A un polynôme et B un polynôme non nul. Il existe des polynômes Q et R uniques tels que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B$$

3. DÉRIVATION

Polynôme dérivée. Linéarité de la dérivation. Dérivée d'un produit. Dérivées d'ordre supérieur. Formule de Leibniz.

4. RACINES

Racine d'un polynôme.

a est une racine de P si et seulement si $X - a$ divise P .

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Hors programme cette semaine : Décomposition en facteurs irréductibles et ordre de multiplicité d'une racine

Documents utilisés en classe

Cours : cours16.pdf

TD :TD16.pdf

Exercices à préparer

On commencera par un exercice du type (pour mettre l'accent sur les méthodes mises en jeu - modifier les énoncés) :

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

1. $X + 1$,
2. $X^2 - 3X + 2$.
3. $X^2 + 2X + 1$.

Exercice 3. Factoriser $P(X) = X^3 + (1 + \mathbf{i})X^2 + (\mathbf{i} - 1)X - \mathbf{i}$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine imaginaire pure.