Programme de colles n°24

Du 07/04 au 10/04

Sous-espaces vectoriels en dimension finie & Applications linéaires

Espaces vectoriels de dimension finie

1. Dimension finie
   Définition.
   Théorème de la base extraite. Théorème de la base incomplète.
   Dimension. Dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   Théorème. *Soient E est de dimension n et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.*
2. Sous-espaces vectoriels de dimension finie
   Théorème. *Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. De plus, $F = E$ si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.*
   Formule de Grassmann. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :
   $$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$
3. Somme de deux sous-espaces vectoriels
   Définition de $F+G$. Définition de « F et G sont en somme directe ».
   Caractérisation somme directe. $F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}$.
4. Sous-espaces vectoriels supplémentaires
   Définition de $F \oplus G = E$.
   Caractérisation.
   $$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff F + G = E \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0\} \\ &\iff \dim(F+G) = \dim(E) \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0\}. \end{aligned}$$

Applications linéaires

1. Applications linéaires : définitions et opérations - Endomorphismes
2. Image et noyau d'une application linéaire - Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité de f
3. Isomorphismes et automorphismes.

Documents utilisés en classe :

cours18.pdf TD18.pdf