

## Feuille d'exercices n°10

### Équations différentielles – Correction

#### Équations différentielles linéaires du premier ordre

**Exercice 1.** Vérifier que la fonction  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle donnée et déterminer la constante  $C$  avec la condition initiale donnée.

1.  $(E_1) : xy' = 3y$  ,  $\varphi : \mathbb{R}^{+\star} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $\varphi(2) = 32$  .  
 $x \mapsto Cx^3$
2.  $(E_2) : y' + 3x^2y = 0$  ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $\varphi(2) = 1$  .  
 $x \mapsto Ce^{-x^3}$
3.  $(E_3) : y' + 2y + 2 = 0$  ,  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $\varphi(0) = -1$  .  
 $x \mapsto Ce^{-2x} - 1$
4.  $(E_4) : y' + \frac{2}{x}y = 5x^2$  ,  $\varphi : \mathbb{R}^{-\star} \rightarrow \mathbb{R}$  ,  $\varphi(-1) = 2$  .  
 $x \mapsto x^3 + \frac{C}{x^2}$

1. On vérifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ ,  $x\varphi'(x) = 3\varphi(x)$ .  
 $\varphi(2) = 32 \iff C \times 2^3 = 32 \iff C = 4$ .  
 Conclusion :  $\varphi : \mathbb{R}^{+\star} \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $x \mapsto 4x^3$
2. On vérifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) + 3x^2\varphi(x) = 0$ .  
 $\varphi(2) = 1 \iff Ce^{-2^3} = 1 \iff C = e^8$ .  
 Conclusion :  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $x \mapsto e^{8-x^3}$
3. On vérifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(x) + 2\varphi(x) + 2 = 0$ .  
 $\varphi(0) = -1 \iff Ce^{-2 \times 0} - 1 = -1 \iff C = 0$ .  
 Conclusion :  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $x \mapsto -1$
4. On vérifie que pour tout  $x \in \mathbb{R}^{-\star}$ ,  $\varphi'(x) + \frac{2}{x}\varphi(x) = 5x^2$ .  
 $\varphi(-1) = 2 \iff (-1)^3 + \frac{C}{(-1)^2} = 2 \iff C = 3$ .  
 Conclusion :  $\varphi : \mathbb{R}^{-\star} \rightarrow \mathbb{R}$  .  
 $x \mapsto x^3 + \frac{3}{x^2}$

**Exercice 2.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $y' - 3y = 0.$
2.  $y' - y = 1.$
3.  $y' + 2y = e^{-x}.$
4.  $y' + y = \cos(x) + \sin(x).$
5.  $y' = \frac{1}{1+x^2}.$
6.  $y' = -2xy + e^{x-x^2}.$
7.  $y' = y + e^x \sin(2x).$
8.  $(x^2 + 1)y' + 2xy = 2x.$
9.  $(1 + x^2)^2 y' + 2x(1 + x^2)y = 1.$

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{3x} \end{array} \right\}$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^x - 1 \end{array} \right\}$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{-2x} + e^{-x} \end{array} \right\}$$

$$4. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{-x} + \sin(x) \end{array} \right\}$$

$$5. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto C + \arctan(x) \end{array} \right\}$$

$$6. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{-x^2} + e^{x-x^2} \end{array} \right\}$$

$$7. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^x - \frac{1}{2} \cos(2x)e^x \end{array} \right\}$$

$$8. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{C}{1+x^2} + 1 \end{array} \right\}$$

$$9. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{C}{1+x^2} + \frac{\arctan(x)}{1+x^2} \end{array} \right\}$$

**Exercice 3.** Résoudre sur les intervalles spécifiés les équations différentielles suivantes :

1.  $\sin(x)y' - \cos(x)y = \sin(x)^2$  sur  $]0, \pi[.$
2.  $\sqrt{1-x^2}y' + y = 0$  sur  $]0, 1[.$
3.  $(x^2 - 1)y' + 2xy = 0$  sur  $] -1, 1[.$
4.  $xy' + y + xe^x = 0$  sur  $\mathbb{R}^{+*}.$
5.  $xy' + y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  sur  $] -1, 0[.$
6.  $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$  sur  $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$

$$1. (E) \quad y' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = \sin(x).$$

$$a(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}, \quad A(x) = -\ln(|\sin(x)|) = -\ln(\sin(x)) \text{ et } b(x) = \sin(x).$$

On note  $(H)$  l'équation homogène associée :  $(H) \quad y' - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}y = 0.$

Solutions de  $(H)$  :  $y_H(x) = Ce^{-A(x)} = C \sin(x).$

Solution particulière :  $y_P(x) = C(x) \sin(x)$  avec  $C'(x) = b(x)e^{A(x)} = 1.$

$C(x) = x$  convient et  $y_P(x) = x \sin(x)$  est une solution de  $(E).$

Solutions de  $(E)$  :  $y(x) = y_P(x) + y_H(x).$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto (x + C) \sin(x) \end{array} \right\}.$$

$$2. (E) \quad y' + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0.$$

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad A(x) = \arcsin(x) \text{ et } b(x) = 0.$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto Ce^{-\arcsin(x)} \end{array} \right\}.$$

$$3. (E) \quad y' + \frac{2x}{x^2-1}y = 0.$$

$$a(x) = \frac{2x}{x^2-1}, \quad A(x) = \ln(|x^2 - 1|) = \ln(1 - x^2).$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} ] -1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad C \in \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{C}{1-x^2} \end{array} \right\}.$$

4. (E)  $y' + \frac{1}{x}y = -e^x$ .

$a(x) = \frac{1}{x}$ ,  $A(x) = \ln(|x|) = \ln(x)$  et  $b(x) = -e^x$ .

$y_H(x) = Ce^{-A(x)} = \frac{C}{x}$ .

On cherche  $y_P(x)$  une solution de (E) sous la forme  $y_P(x) = \frac{C(x)}{x}$ .

Alors  $C'(x) = b(x)e^{A(x)} = -xe^x$ . Pour déterminer une primitive de  $C'(x)$ , on effectue une intégration par parties :

$$\int -xe^x dx = -xe^x - \int -e^x dx = -xe^x + e^x.$$

$C(x) = -xe^x + e^x$  convient, et  $y_P(x) = \frac{-xe^x + e^x}{x}$  est une solution de (E).

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{C - xe^x + e^x}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

5. (E)  $y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ .

$a(x) = \frac{1}{x}$ ,  $A(x) = \ln(|x|) = \ln(-x)$  et  $b(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ .

Solutions de (H), équation homogène associée :  $y_H(x) = Ce^{-A(x)} = \frac{C}{-x}$ .

Solution particulière de (E) :  $y_P(x) = -\frac{C(x)}{x}$  avec

$C'(x) = b(x)e^{A(x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

$C(x) = \arccos(x)$  convient et  $y_P(x) = -\frac{\arccos(x)}{x}$  est une solution de (E).

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} ]-1, 0[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto -\frac{C + \arccos(x)}{x}, \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

6. (E)  $y' + \tan(x)y = \sin(2x)$ .

$a(x) = \tan(x)$ ,  $A(x) = -\ln(|\cos(x)|) = -\ln(\cos(x))$  et  $b(x) = \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ .

Solutions de (H), équation homogène associée :  $y_H(x) = Ce^{-A(x)} = C\cos(x)$ .

Solution particulière de (E) :  $y_P(x) = C(x)\cos(x)$  avec

$C'(x) = b(x)e^{A(x)} = 2\sin(x)$ .

$C(x) = -2\cos(x)$  convient et  $y_P(x) = -2\cos^2(x)$  est une solution

de (E).

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto C\cos(x) - 2\cos^2(x), \quad C \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

**Exercice 4.** Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont les fonctions

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{C+x}{1+x^2}, \text{ avec } C \in \mathbb{R},$$

seraient les solutions.

Les fonctions  $x \mapsto C+x$  et  $x \mapsto 1+x^2$  sont dérivables. De plus  $1+x^2 \neq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $f$  est donc dérivable en tant que quotient de fonctions dérivables.

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 \times (1+x^2) - (C+x) \times 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{(1+x^2)} \times \frac{C+x}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} \times f(x). \end{aligned}$$

On en déduit que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2}y$ , c'est-à-dire

$$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}.$$

## Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

**Exercice 5.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - 3y' + 2y = 0$
2.  $y'' - 4y' + 4y = 0.$
3.  $y'' + y = 0.$
4.  $y'' + y' - 2y = 0.$
5.  $y'' + 2y' + 5y = 0.$
6.  $y'' + y' + y = 0.$

$$1. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^x + Be^{2x} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$2. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax + B)e^{2x} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$3. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$4. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^x + Be^{-2x} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$5. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x}(A \cos(2x) + B \sin(2x)) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$6. \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

**Exercice 6.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

1.  $y'' - 3y' + 2y = 4e^{3x}$
2.  $y'' - 3y' + 2y = 2e^x.$
3.  $y'' - 2y' + y = 6e^x.$
4.  $y'' + y' + y = e^x.$
5.  $y'' - y = e^x.$
6.  $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}.$

$$1. y_H(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

$\gamma = 3$  n'est pas une racine de  $P(x)$ , polynôme caractéristique associé à  $(E_1)$ .

On cherche donc  $y_P(x)$  solution de  $(E_1)$  sous la forme  $y_P(x) = Ce^{3x}$ .  
 $y_P$  est solution de  $(E_1)$

$$\iff y_P''(x) - 3y_P'(x) + 2y_P(x) = 4e^{3x}$$

$$\iff C = 2.$$

Donc  $y_P(x) = 2e^{3x}$ .

Conclusion :

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^x + Be^{2x} + 2e^{3x} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$2. y_H(x) = Ae^x + Be^{2x}.$$

$\gamma = 1$  est une racine simple de  $P(x)$ , polynôme caractéristique associé à  $(E_2)$ .

On cherche donc  $y_P(x)$  solution de  $(E_2)$  sous la forme  $y_P(x) = Cxe^x$ .  
 $y_P$  est solution de  $(E_2)$

$$\iff y_P''(x) - 3y_P'(x) + 2y_P(x) = 2e^x$$

$$\iff C = -2.$$

Donc  $y_P(x) = -2xe^x$ .

Conclusion :

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^x + Be^{2x} - 2xe^x \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$3. y_H(x) = (Ax + B)e^x.$$

$\gamma = 1$  est une racine double de  $P(x)$ , polynôme caractéristique associé à  $(E_3)$ .

On cherche donc  $y_P(x)$  solution de  $(E_3)$  sous la forme  $y_P(x) = Cx^2e^x$ .

$y_P$  est solution de  $(E_3)$

$$\iff y_P''(x) - 2y_P'(x) + y_P(x) = 6e^x$$

$$\iff C = 3.$$

$$\text{Donc } y_P(x) = 3x^2e^x.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax + B)e^x + 3x^2e^x \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$4. y_H(x) = e^{-\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right).$$

$\gamma = 1$  n'est pas une racine de  $P(x)$ , polynôme caractéristique associé à  $(E_4)$ .

On cherche donc  $y_P(x)$  solution de  $(E_4)$  sous la forme  $y_P(x) = Ce^x$ .

$y_P$  est solution de  $(E_4)$

$$\iff y_P''(x) + y_P'(x) + y_P(x) = e^x$$

$$\iff C = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } y_P(x) = \frac{1}{3}e^x.$$

Conclusion :

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left( A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) + \frac{1}{3}e^x \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$5. \mathcal{S}_5 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-x} + Be^x + xe^x \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$6. \mathcal{S}_6 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax + B)e^{2x} + \frac{3}{2}x^2e^{2x} \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 7.** Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

$$1. y'' - y = \cos(x).$$

$$2. y'' + y = \cos(x).$$

$$3. y'' + y = \sin(x).$$

$$4. y'' - 4y' + 4y = 8 \sin(2x).$$

$$5. y'' - 3y' + 2y = \cos(x)e^x.$$

$$6. y'' + 2y = 2 \sin(x)e^x.$$

$$1. \mathcal{S}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-x} + Be^x - \frac{1}{2} \cos(x) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$2. \mathcal{S}_2 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) + \frac{1}{2}x \sin(x) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$3. \mathcal{S}_3 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \cos(x) + B \sin(x) - \frac{1}{2}x \cos(x) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$4. \mathcal{S}_4 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (Ax + B)e^{2x} + \cos(2x) \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$5. \mathcal{S}_5 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^x + Be^{2x} - \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x))e^x \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$6. \mathcal{S}_6 = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x) + \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^x \end{array}, (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 8.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$1. \begin{cases} y'' - y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} y'' - 2y' + y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} y'' + y = 0 \text{ sur } \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$1. \mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{e^{-x} + e^x}{2} \end{array} \right\}.$$

$$2. \mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (2x + 1)e^x \end{array} \right\}.$$

$$3. \mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{array} \right\}.$$

**Exercice 9.** Soient  $\omega$  et  $\omega_0$  deux réels strictement positifs tels que  $\omega \neq \omega_0$ . Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .

On note  $(E)$  l'équation  $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$  et  $(H)$  son équation homogène associée :  $y'' + \omega^2 y = 0$ .

Solutions de (H) :  $y_H(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$ .

Solution particulière de (E) :  $y_P(x) = \operatorname{Re}(z_P(x))$  où  $z_P$  est une solution de l'équation différentielle  $z'' + \omega^2 z = e^{i\omega_0 x}$  ( $\tilde{E}$ ). On cherche  $z_P(x)$  sous la forme  $z_P(x) = C e^{i\omega_0 x}$  (car  $\omega_0 \neq \omega$ ) avec  $C$  à déterminer.

$$\begin{aligned} z_P \text{ est solution de } (\tilde{E}) &\iff z_P''(x) + \omega^2 z_P(x) = e^{i\omega_0 x} \\ &\iff C = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}. \end{aligned}$$

Donc  $z_P(x) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega_0 x}$  et  $y_P(x) = \operatorname{Re}(z_P(x)) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x)$ .

Solutions de (E) :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_H(x) + y_P(x) \\ &= A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x). \end{aligned}$$

Conditions initiales :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} A + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} = 1 \\ B\omega = 0 \end{cases} \\ &\iff A = 1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad \text{et} \quad B = 0. \end{aligned}$$

Conclusion :  $y(x) = \left(1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \cos(\omega x) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x)$ .

## Divers

**Exercice 10.** Déterminer les fonctions  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\text{pour tout } x \in [0, 1], \quad f'(x) + f(x) = f(0) + f(1).$$

Analyse : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ . Alors  $\forall x \in [0, 1], f'(x) = f(0) + f(1) - f(x)$  et  $f'$  est dérivable en tant que somme de fonctions dérivable. On obtient

alors pour tout  $x \in [0, 1], f''(x) + f'(x) = 0$ . D'où  $f(x) = A e^{-1 \times x} + B e^{0 \times x} = A e^{-x} + B$ , avec  $A$  et  $B$  des constantes réelles. Enfin

$$\begin{aligned} f'(x) + f(x) = f(0) + f(1) &\iff B = (A + B) + (A e^{-1} + B) \\ &\iff B = -A(1 + e^{-1}). \end{aligned}$$

Donc  $f$  est de la forme  $f(x) = A (e^{-x} - 1 - e^{-1})$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

Synthèse : Réciproquement on vérifie que toute fonction  $f$  de la forme  $f(x) = A (e^{-x} - 1 - e^{-1})$  convient, c'est-à-dire est dérivable et satisfait pour tout  $x \in [0, 1], f'(x) + f(x) = f(0) + f(1)$ .

**Exercice 11.** Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Analyse : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable telle que  $f'(x) + f(-x) = e^x$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Alors pour tout  $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - f(-x)$ , et  $f'$  est donc dérivable (en tant que somme de deux fonctions dérivables).

$$\begin{aligned} &\text{Ainsi pour tout } x \in \mathbb{R}, [f'(x) + f(-x)]' = e^x \\ &\implies \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f''(x) - f'(-x) = e^x \\ &\implies \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f''(x) - (e^{-x} - f(x)) = e^x \\ &\implies \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, f''(x) + f(x) = e^x + e^{-x}. \end{aligned}$$

$f$  est donc solution d'une équation différentielle du second degré :  $y'' + y = e^x + e^{-x}$  (E).

Solutions de (H) :  $y_H(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$ .

Solutions particulière de (E) :  $y_P(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} e^{-x}$  (principe de superposition).

Donc  $f$  est de la forme  $f(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  avec  $A$  et  $B$  des constantes réelles. Enfin

$$f'(x) + f(-x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R} \iff B = -A$$

donc  $f$  est de la forme  $f(x) = A (\cos(x) - \sin(x)) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

Synthèse : Réciproquement on vérifie que toute fonction  $f$  de la forme  $f(x) = A(\cos(x) - \sin(x)) + \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  avec  $A \in \mathbb{R}$  convient, c'est-à-dire est dérivable et satisfait pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) + f(-x) = e^x$ .

**Exercice 12.** On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{x-1}{x^2 e^x} \quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^{+*}.$$

1. Soit  $\varphi$  une fonction réelle définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$ , deux fois dérivable. On considère la fonction  $\psi$  définie sur  $\mathbb{R}^{+*}$  telle que

$$\psi(x) = \varphi(x)e^x.$$

Montrer que  $\varphi$  est solution de (E) si et seulement

$$\text{si pour tout } x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \psi''(x) + \psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

2. Résoudre l'équation (E).

1.  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \psi''(x) + \psi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$   
 $\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, [\varphi(x)e^x]'' + [\varphi(x)e^x]' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$   
 $\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, [\varphi''(x) + 2\varphi'(x) + \varphi(x)]e^x + [\varphi'(x) + \varphi(x)]e^x = \frac{x-1}{x^2}$   
 $\iff \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi''(x) + 3\varphi'(x) + 2\varphi(x) = \frac{x-1}{x^2 e^x}$   
 $\iff \varphi$  est solution de (E).
2. On note (H) l'équation homogène associée à (E) :  $y'' + 3y' + 2y = 0$ .

Les solutions de (H) sont les fonctions  $y_H(x) = Ae^{-2x} + Be^{-x}$ , avec  $A$  et  $B$  des constantes réelles.

On constate que la fonction  $\ln$  est une solution de  $y'' + y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ .

D'après la question précédente,  $\varphi(x) = \frac{\ln(x)}{e^x}$  est une solution de (E).

Conclusion :  $\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto Ae^{-2x} + Be^{-x} + \frac{\ln(x)}{e^x}, \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right\}$ .