

Feuille d'exercices n°11

Géométrie élémentaire de l'espace – Correction

On note \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace. On munit \mathcal{E} d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte

Exercice 1. Soient A, B, C et D quatre points de \mathcal{E} de coordonnées respectives $(3, 0, -1)$, $(2, 1, -1)$, $(4, 2, 5)$ et $(3, 4, 3)$ dans \mathcal{R} .

1. Calculer les distances AB , AC et BC . Que peut-on en déduire ?
2. Calculer les produits scalaires $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ et $\vec{BC} \cdot \vec{AD}$.
3. Déterminer les produits vectoriels $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et $\vec{BC} \wedge \vec{AD}$.
4. Calculer le produit mixte $[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$. En déduire le volume du parallélépipède engendré par \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} .

$$\vec{AB} = (-1, 1, 0), \vec{AC} = (1, 2, 6) \text{ et } \vec{BC} = (2, 1, 6).$$

$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{2}$, $AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{41}$ et $BC = \|\vec{BC}\| = \sqrt{41}$. On en déduit que le triangle ABC est isocèle en C .

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 1 \text{ et } \vec{BC} \cdot \vec{AD} = 28.$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = (6, 6, -3) \text{ et } \vec{BC} \wedge \vec{AD} = (-20, -8, 8).$$

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 12.$$

Exercice 2. Déterminer une base orthonormale directe de \mathcal{E} dont le premier vecteur est colinéaire au vecteur $(1, 2, 2)$.

On commence par déterminer une base orthogonale directe de \mathcal{E} dont $\vec{u}(1, 2, 2)$ est le premier vecteur.

Le vecteur $\vec{v}(2, -1, 0)$ est orthogonal au vecteur \vec{u} (car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$). On pose $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Le vecteur \vec{w} a pour coordonnées $(2, 4, -5)$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base orthogonale directe de \mathcal{E} . On normalise à présent la base obtenue en posant $\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u}$, $\vec{v}_1 = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$

et $\vec{w}_1 = \frac{1}{\|\vec{w}\|} \vec{w}$. La famille $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, \vec{w}_1)$ constitue une base orthonormale directe de \mathcal{E} et \vec{u}_1 est bien colinéaire à \vec{u} .

Exercice 3. Pour quelles valeurs de a les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ constituent-ils une base de \mathcal{E} ?

Les vecteurs $(1, 0, a)$, $(a, 1, 0)$ et $(0, a, 1)$ constituent-ils une base de \mathcal{E} si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

si et seulement si $a^3 + 1 \neq 0$, si et seulement si $a \neq -1$.

Exercice 4. Soient A, B et C trois points de \mathcal{E} . Montrer que :

$$\forall M \in \mathcal{E}, \vec{MA} \wedge \vec{MB} + \vec{MB} \wedge \vec{MC} + \vec{MC} \wedge \vec{MA} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}.$$

Soit $M \in \mathcal{E}$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \wedge (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \\ &= (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) \wedge (-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} \\ &= \vec{0} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} \\ &= \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\forall M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Plans et droites

Exercice 5. Les points A , B et C définissent-ils un plan? Si oui, en donner une représentation paramétrique, puis une équation cartésienne.

1. $A(2, 4, 0)$; $B(0, 6, 0)$; $C(6, 0, 0)$.
2. $A(1, 2, 0)$; $B(-2, 1, -4)$; $C(0, 3, 0)$.

Trois points définissent un plan si et seulement s'ils ne sont pas alignés.

1. $\overrightarrow{AB}(-2, 2, 0)$ et $\overrightarrow{AC}(4, -4, 0)$. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} étant colinéaires, les points A , B et C sont alignés et ne définissent donc pas un plan (mais une droite).
2. $A(1, 2, 0)$; $B(-2, 1, -4)$; $C(0, 3, 0)$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-3, -1, -4)$ et $\overrightarrow{AC}(-1, 1, 0)$ ne sont pas colinéaires ($\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$). Les points A , B et C ne sont donc pas alignés et ils définissent un plan dont une représentation paramétrique est :

$$(ABC) : \begin{cases} x = 1 - 3\lambda - \mu \\ y = 2 - \lambda + \mu \\ z = -4\lambda \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

et une représentation cartésienne est :

$$(ABC) : x + y - z - 3 = 0.$$

Exercice 6. Déterminer une équation cartésienne et une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} :

1. passant par $A(1, 0, 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1, -1, 2)$;
2. passant par $A(0, 1, 1)$ et engendré par les vecteurs $\vec{u}(1, -1, 0)$ et $\vec{v}(0, 0, 2)$;
3. passant par $A(1, -2, 3)$ et parallèle au plan \mathcal{Q} d'équation $5x + 3y - z + 1 = 0$;
4. plan médiateur du segment $[AB]$, avec $A(2, 0, -1)$ et $B(4, -2, 3)$.

1. $\mathcal{P} : x - y + 2z - 3 = 0,$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 3 + \lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

2. $\mathcal{P} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$

$$\mathcal{P} : x + y - 1 = 0.$$

3. $\mathcal{P} : 5x + 3y - z + 4 = 0,$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 4 + 5\lambda + 3\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

4. $\mathcal{P} : x - y + 2z - 6 = 0,$

$$\mathcal{P} : \begin{cases} x = 6 + \lambda - 2\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 7. Montrer que les points $A(2, -3, 4)$, $B(1, 0, 2)$, $C(2, -1, 2)$ et $D(1, -1, 3)$ sont coplanaires.

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$, les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{AD} sont donc coplanaires et les points A, B, C et D le sont également.

Exercice 8. Déterminer une représentation paramétrique, ainsi qu'un système d'équations cartésiennes des droites :

- \mathcal{D}_1 passant par le point $A(1, 2, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -2, 4)$;
- \mathcal{D}_2 passant par les points $B(1, 2, -3)$ et $C(0, 3, -4)$;
- \mathcal{D}_3 passant par le point $D(2, 0, 1)$ et parallèle à \mathcal{D}_2 .

$$1. \mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} 2x + y - 4 = 0, \\ 4x - z - 5 = 0. \end{cases}$$

$$2. \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ x - z - 4 = 0. \end{cases}$$

$$3. \mathcal{D}_3 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\mathcal{D}_3 : \begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - z - 1 = 0. \end{cases}$$

Parallélisme et alignement

Exercice 9. Les deux ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 donnés par les équations suivantes sont-ils parallèles? Préciser la nature de ces ensembles.

- $\mathcal{E}_1 : 4x - 2y + 6z - 1 = 0$ et $\mathcal{E}_2 : 6x - 3y + 9z = 0$.
- $\mathcal{E}_1 : x - y + z - 1 = 0$ et $\mathcal{E}_2 : -x - y - z + 1 = 0$.
- $\mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{E}_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

$$4. \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et } \mathcal{E}_2 : 2x + y - z + 2 = 0.$$

- \mathcal{E}_1 est un plan orthogonal à $\vec{n}_1 = (4, -2, 6)$ et \mathcal{E}_2 est un plan orthogonal à $\vec{n}_2 = (6, -3, 9)$. Comme $\vec{n}_2 = \frac{3}{2}\vec{n}_1$, les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont colinéaires et les plans \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont parallèles.
- \mathcal{E}_1 est un plan orthogonal à $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ et \mathcal{E}_2 est un plan orthogonal à $\vec{n}_2 = (-1, -1, -1)$. Comme les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas colinéaires ($\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \neq \vec{0}$), les plans \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ne sont pas parallèles.
- \mathcal{E}_1 est une droite dirigée par $\vec{u}_1 = (1, -3, -2)$ et \mathcal{E}_2 est une droite dirigée par $\vec{u}_2 = (0, 3, 2)$. Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 n'étant pas colinéaires, les droites \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ne sont pas parallèles.
- \mathcal{E}_1 est une droite dirigée par $\vec{u}_1 = (2, 1, -1)$ et \mathcal{E}_2 est un plan orthogonal à $\vec{n}_2 = (2, 1, -1)$. $\mathcal{E}_1 // \mathcal{E}_2 \iff \vec{u}_1 \perp \vec{n}_2 \iff \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Ici les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{n}_2 ne sont pas orthogonaux, la droite \mathcal{E}_1 n'est pas parallèle au plan \mathcal{E}_2 .

Exercice 10. $ABCDEFGH$ est un cube.

- Montrer que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.
- On note P le centre de gravité du triangle BEG . Montrer que les points D , F et P sont alignés.

- On se place dans le repère $\mathcal{R}(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

On introduit $\vec{n}_1 = \vec{BD} \wedge \vec{BE}$, un vecteur normal au plan (BDE) , et $\vec{n}_2 = \vec{CF} \wedge \vec{CH}$, un vecteur normal au plan (CFH) . On vérifie que ces vecteurs sont colinéaires et on en déduit que les plans (BDE) et (CFH) sont parallèles.

- On note (x_P, y_P, z_P) les coordonnées du centre de gravité du triangle BEG :

$$x_P = \frac{x_B + x_E + x_G}{3}, \quad y_P = \frac{y_B + y_E + y_G}{3} \quad \text{et} \quad z_P = \frac{z_B + z_E + z_G}{3}.$$

Donc P a pour coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Pour montrer que les points D, F et P sont alignés, on vérifie que les vecteurs \overrightarrow{DF} et \overrightarrow{DP} sont colinéaires.

Orthogonalité

Exercice 11. Les deux ensembles suivants sont-ils perpendiculaires ?

1. $\mathcal{P}_1 : 4x + y - 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x + 2y + 3z - 2 = 0$.

2. $\mathcal{P}_3 : x + 2y - z - 3 = 0$ et $\Delta : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 - 4t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

- \mathcal{P}_1 est un plan de vecteur normal $\vec{n}_1(4, 1, -2)$ et \mathcal{P}_2 est un plan de vecteur normal $\vec{n}_2(1, 2, 3)$. Les vecteurs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont orthogonaux (car $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$), et les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont donc perpendiculaires.
- \mathcal{P}_3 est un plan de vecteur normal $\vec{n}_3(1, 2, -1)$ et Δ est une droite dirigée par $\vec{u}(-2, -4, 2)$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{n}_3 sont colinéaires ($\vec{u} = -2\vec{n}_3$). La droite Δ est donc perpendiculaire au plan \mathcal{P}_3 .

Exercice 12. $ABCDEFGH$ est un cube. Montrer que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) .

On se place dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On vérifie que $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BE} = 0$, donc $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AG} \perp \overrightarrow{BE}$. On en déduit que la droite (AG) est perpendiculaire au plan (BDE) .

Exercice 13. Soit Δ une droite de vecteur directeur \vec{u} , contenue dans un plan \mathcal{P} , et A un point n'appartenant pas à \mathcal{P} . On note H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} , et L le projeté orthogonal de H sur Δ . Montrer que les droites (AL) et Δ sont perpendiculaires.

On a

$$\overrightarrow{AL} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HL}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{HL} \cdot \vec{u}.$$

Or la droite (AH) est perpendiculaire à \mathcal{P} (H étant le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P}) et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, donc $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$. De plus, les droites (HL)

et Δ sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{HL} \cdot \vec{u} = 0$. D'où $\overrightarrow{AL} \cdot \vec{u} = 0$. Les vecteurs \overrightarrow{AL} et \vec{u} sont donc orthogonaux. On en déduit que les droites (AL) et Δ sont orthogonales. Étant de plus sécantes en L , les droites (AL) et Δ sont perpendiculaires.

Intersection d'ensembles de points

Exercice 14. Déterminer l'intersection des ensembles suivants :

1. $\mathcal{P}_1 : x - 2y + 2z + 2 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : 3x + y - z + 1 = 0$.

2. $\mathcal{P}_1 : y + z + 2 = 0$ et $\mathcal{P}_2 : x - y - 1 = 0$.

3. $\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ et $\mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -t + 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

4. \mathcal{D} , la droite passant par $A(1, -2, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-2, 3, 1)$, et \mathcal{P} , le plan d'équation $3x - 5y + z - 4 = 0$.

5. \mathcal{D} , la droite passant par $A(1, 2, 3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, -1, 1)$, et \mathcal{P} , le plan d'équation $x + 2y + z = 0$.

6. $\mathcal{P} : x - y + z + 2 = 0$, $\mathcal{Q} : 2x - 4y + 6z + 3 = 0$ et $\mathcal{R} : x - 2y + 3z = 0$.

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = \frac{5}{7} + t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est la droite dirigée par $\vec{u}(0, 1, 1)$ passant par $A(-\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, 0)$.

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \iff \begin{cases} x = 1 + t \\ y = t \\ z = -2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

$\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est la droite dirigée par $\vec{u}(1, 1, -1)$ passant par $A(1, 0, -2)$.

3. $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ est le point de coordonnées $(2, 1, -1)$.

4. $\mathcal{D} \cap \mathcal{P}$ est le point de coordonnées $(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

5. $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

6. $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \cap \mathcal{R} = \emptyset$.

Distance d'un point à une droite - Distance d'un point à un plan

Exercice 15. Déterminer la distance :

1. du point $A(1, 2, 1)$ au plan $\mathcal{P} : x - 2y + 3z = 1$;
2. du point $B(1, 2, -1)$ à la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$;
3. du point $C(1, 0, 2)$ à la droite $\Delta : \begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x - y + z = -1 \end{cases}$.

$$1. d(A, \mathcal{P}) = \frac{|x_A - 2y_A + 3z_A - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{14}.$$

2. \mathcal{D} est la droite passant par $A(1, 2, 0)$ dirigée par $\vec{u}(3, -1, 2)$.

$$d(B, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{35}}{7}.$$

3. Une représentation paramétrique de Δ est $\begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = -3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Δ est la droite passant par $A(2, 0, -3)$ dirigée par $\vec{u}(0, 1, 1)$.

$$d(C, \Delta) = \frac{\|\vec{AC} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\|(-5, 1, -1)\|}{\|(0, 1, 1)\|} = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Exercice 16. Soient A un point de \mathcal{E} de coordonnées $(2, 0, 1)$ dans \mathcal{R} , et \mathcal{P} le plan d'équation $2x + y - z + 3 = 0$.

1. Déterminer la distance du point A au plan \mathcal{P} .
2. On note H le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} . Déterminer les coordonnées du point H dans \mathcal{R} .
3. Retrouver le résultat de la question 1 en utilisant la question précédente.

$$1. d(A, \mathcal{P}) = \sqrt{6}.$$

2. On note (x_H, y_H, z_H) les coordonnées de H . Le vecteur $\vec{n}(2, 1, -1)$ est un vecteur normal de \mathcal{P} . On note Δ la droite passant par A et dirigée par \vec{n} .

$$H \in \Delta \text{ donc } \begin{cases} x_H = 2 + 2t \\ y_H = t \\ z_H = 1 - t \end{cases} \text{ avec } t \text{ à déterminer. De plus}$$

$$H \in \mathcal{P}, \text{ donc } 2x_H + y_H - z_H + 3 = 0, \text{ donc } t = -1.$$

$$\text{Conclusion : } H(0, -1, 2).$$

$$3. d(A, \mathcal{P}) = AH = \sqrt{(0-2)^2 + (-1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6}.$$

Exercice 17. Soient \mathcal{D} la droite passant par $A(1, -2, 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(1, 1, -1)$, et B le point de coordonnées $(0, 1, -2)$ dans \mathcal{R} .

1. Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal de B sur \mathcal{D} .
2. En déduire la distance de B à la droite \mathcal{D} .

$$1. H \in \mathcal{D} \text{ donc } \begin{cases} x_H = 1 + t \\ y_H = -2 + t \\ z_H = -t \end{cases} \text{ avec } t \text{ à déterminer. De plus,}$$

$$\vec{BH} \perp \vec{u}, \text{ donc } \vec{BH} \cdot \vec{u} = 0, \text{ donc } t = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Conclusion : } H\left(\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

$$2. d(B, \mathcal{D}) = BH = \sqrt{\left(\frac{7}{3} - 0\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} - 1\right)^2 + \left(-\frac{4}{3} + 2\right)^2} = \frac{\sqrt{78}}{3}.$$

Remarque. On peut vérifier ce résultat en utilisant la formule du

$$\text{cours } d(B, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exercice 18. On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

1. Déterminer la distance du point G au plan (BDE) .
2. En déduire le volume du tétraèdre $BDEG$.

1. On se place dans le repère $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. On pose

$$\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BE} = (1, 1, 1).$$

$$(BDE) : x + y + z - 1 = 0$$

$$d(G, (BDE)) = \frac{|x_G + y_G + z_G - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

2.

$$V_{BDEG} = \frac{\text{Base} \times \text{Hauteur}}{3}$$

$$= \frac{A_{BDE} \times d(G, (BDE))}{3}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} \times \sqrt{2}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}}{3} \quad (BDE \text{ est un triangle équilatéral de côté } \sqrt{2})$$

$$= \frac{1}{3}.$$

Remarque. On peut vérifier ce résultat en utilisant le fait que

$$V_{BDEG} = \frac{|\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}|}{6}.$$

Exercice 19. Soient \mathcal{P} et \mathcal{Q} les plans d'équations respectives $x + y + z - 1 = 0$ et $z = 0$ dans \mathcal{R} . Montrer que l'ensemble des points équidistants de \mathcal{P} et \mathcal{Q} est la réunion de deux plans orthogonaux.

Soit M un point de \mathcal{E} de coordonnées (x, y, z) .

$$d(M, \mathcal{P}) = d(M, \mathcal{Q}) \iff \frac{|x + y + z - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|z|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}$$

$$\iff |x + y + z - 1| = \sqrt{3}|z|$$

$$\iff x + y + z - 1 = \sqrt{3}z \quad \text{ou} \quad x + y + z - 1 = -\sqrt{3}z$$

$$\iff M \in \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$$

où \mathcal{P}_1 est le plan d'équation $x + y + (1 - \sqrt{3})z - 1 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}_1(1, 1, 1 - \sqrt{3})$, et \mathcal{P}_2 est le plan d'équation $x + y + (1 + \sqrt{3})z - 1 = 0$, de vecteur normal $\vec{n}_2(1, 1, 1 + \sqrt{3})$. Il reste à vérifier que les plans \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont orthogonaux. On a $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$, donc $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$, d'où $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$.

Sphères

Exercice 20. 1. Déterminer le centre et le rayon de la sphère dont une équation cartésienne dans \mathcal{R} est :

(a) $\mathcal{S}_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0;$

(b) $\mathcal{S}_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0;$

(c) $\mathcal{S}_3 : x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{17}{4} = 0.$

2. On note \mathcal{P} le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$.

Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_1$, $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_2$ et $\mathcal{P} \cap \mathcal{S}_3$.

1. (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$

$$\iff (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 4.$$

\mathcal{S}_1 est la sphère de centre $\Omega_1(1, 1, 1)$ et de rayon $r_1 = 2$.

(b) $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 6z + 12 = 0$

$$\iff x^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 1.$$

\mathcal{S}_2 est la sphère de centre $\Omega_2(0, 2, -3)$ et de rayon $r_2 = 1$.

(c) $x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y - 2z + \frac{17}{4} = 0$

$$\iff (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z - 1)^2 = -\frac{3}{4}.$$

\mathcal{S}_3 est le vide.

2. $d(\Omega_1, \mathcal{P}) = 0$ donc $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{P}$ est le cercle inclus dans \mathcal{P} de centre Ω_1 et de rayon 2.

$$d(\Omega_2, \mathcal{P}) = \frac{4}{\sqrt{3}} > r_2, \text{ donc } \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{P} = \emptyset.$$

$$\mathcal{S}_3 \cap \mathcal{P} = \emptyset.$$

Exercice 21. Soient I, J et K trois points de \mathcal{E} de coordonnées respectives $(0, 1, -1)$, $(-2, 0, 0)$ et $(1, 0, 1)$ dans \mathcal{R} . On note \mathcal{S} la sphère de centre I et de rayon 2.

Déterminer l'intersection de la sphère \mathcal{S} et de la droite (JK) .

$$\mathcal{S} : (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2^2 \text{ et } (JK) : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \mathcal{S} \cap (JK) &\iff (x-0)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 2^2 \text{ et } \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \text{ avec } t \text{ à déterminer,} \\
 &\iff (3t-2)^2 + (0-1)^2 + (t+1)^2 = 2^2 \text{ et } \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \\
 &\iff 10t^2 - 10t + 2 = 0 \text{ et } \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \\
 &\iff \left(t = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{10} \right) \text{ et } \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}-5}{10} \\ y = 0 \\ z = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{5}+5}{10} \\ y = 0 \\ z = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases} .
 \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathcal{S} \cap (JK)$ est la réunion de deux points : $A \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{10}, 0, \frac{5+\sqrt{5}}{10} \right)$
 et $B \left(-\frac{3\sqrt{5}+5}{10}, 0, \frac{5-\sqrt{5}}{10} \right)$.