Feuille d'exercices n°12
Ensembles et dénombrement

1 Principe de récurrence

Exercice 1. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Combien peut-on dessiner de carrés sur un échiquier 8×8 ? Généraliser avec un échiquier de taille $n \times n$.

Exercice 2. 1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n^2+5)$ est divisible par 6.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 2$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{(u_{n+1})^2}{u_n}.$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{u_n + 2}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 < u_n < 1$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Conjecturer et démontrer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Exercice 8. Montrer l'inégalité de Bernoulli :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 + nx \leqslant (1+x)^n.$$

2 Ensembles et applications

Exercice 9. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire

- $a \in E$?
- $a \subset E$?
- $\{a\} \subset E$?
- $\emptyset \in E$?
- $\emptyset \subset E$?
- $\{\emptyset\} \subset E$?

Exercice 10. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :
1. $A \subset B \iff A \cup B = B$,
2. $A = B \iff A \cap B = A \cup B$,
3. $A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$,
4. $\begin{cases} A \cup B = A \cup C \\ A \cap B = A \cap C \end{cases} \iff B = C.$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ telle que $\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2,\ f(m,n) = mn$.
Soit $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = (n, (n+1)^2)$.
1. f est-elle injective ? surjective ?
2. g est-elle injective ? surjective ?

Exercice 12. Soient

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases} \end{array}.$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité éventuelles de f et de g.
2. Préciser $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 13. 1. Décrire l'image directe de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle.
2. Déterminer l'image réciproque de l'intervalle $[-1;4]$ par la fonction $f : x \to x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

3 Sommes et produits

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Simplifier les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=0}^{n} k$	2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1)$	3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$	5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$	6. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\tfrac{1}{k}\right)$
7. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tfrac{k}{(k+1)!}$	8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$	9. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k)$
10. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\tfrac{1}{k}\right)$	11. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \tfrac{k}{k+1}$	12. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1-\tfrac{1}{k^2}\right)$

4 Factorielles

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Exprimer à l'aide de factorielles :
1. $2 \times 4 \times \cdots \times (2n)$
2. $1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)$
3. le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} u_n.$$

5 Coefficients binomiaux

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer rapidement les expressions suivantes :

1. $\binom{6}{3}$	2. $\binom{n}{1}$	3. $\binom{n}{n-2}$ avec $n \geqslant 2$	4. $\binom{n+p}{n}$ avec $p \in \mathbb{N}$
5. 99^3	6. 1001^2	7. $(n-1)^5$	8. $(1+i)^{2016}$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k$ 2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^{k+1}$ 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ 4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 2^{-k}$

6 Dénombrement

Exercice 18. Avec les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, combien peut-on écrire d'années au-delà de 2000 en utilisant une seule fois le même chiffre ?

Exercice 19. Au bridge, les mains comptent 13 cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien de mains comportent :
1. un seul roi ?
2. aucun roi ?
3. au moins un roi ?
4. les quatre rois ?
5. uniquement des piques ?

Exercice 20. Au poker, on distribue des mains de 5 cartes provenant d'un jeu de 32 cartes. Combien de mains comportent exactement :
1. une couleur (c'est-à-dire cinq cartes du même signe) ?
2. un carré (c'est-à-dire quatre cartes de la même hauteur) ?
3. un full (c'est-à-dire un brelan et une paire) ?
4. un brelan (c'est-à-dire trois cartes de même hauteur, mais pas un full) ?
5. deux paires (mais pas un carré, ni un brelan) ?
6. une paire (c'est-à-dire deux cartes de même hauteur) ?

Exercice 21. Soit $n \geqslant 3$. On considère un polygone convexe à n côtés.
1. Déterminer le nombre de diagonales joignant les sommets.
2. Déterminer le nombre d'intersections entre les diagonales si l'on suppose que deux diagonales ne sont jamais parallèles et trois diagonales ne sont jamais concourantes.

Exercice 22. Soient n et p des entiers naturels non nuls tels que $n \leqslant p$. Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$?

Exercice 23. Déterminer le nombre d'anagrammes des mots « cours », « classe » et « ananas ».

Introduction
Ensembles et dénombrement

1. Listes : quand l'ordre compte

Exercice 1 – Premiers comptages

On dispose de trois lettres distinctes :

$$\{A, B, C\}.$$

1. Expliciter tous les mots de longueur 2 avec répétition autorisée. Combien y en a-t-il ?
   Les mots de longueur 2 (avec répétition autorisée) sont :
   AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC.
   Chaque mot peut être vu comme une 2-liste de l'ensemble $\{A, B, C\}$.
   Il y en a 3^2, soit 9.
2. Même question lorsque la répétition est interdite.
   Les mots de longueur 2 (sans répétition) sont :
   AB, AC, BA, BC, CA, CB.
   Chaque mot peut être vu comme une 2-liste d'éléments distincts de l'ensemble $\{A, B, C\}$.
   Il y en a 3×2, soit 6.

Exercice 2 – Généralisation

Soit A un alphabet à n éléments.

1. Combien y a-t-il de mots de longueur k (avec répétition) ?
   Chaque mot peut être vu comme une **k-liste d'éléments de** A, un élément de A^k. Il y en a $\boxed{n^k}$.
2. Même question lorsque la répétition est interdite.
   Dans ce cas, chaque mot peut être vu comme une **k-liste d'éléments distincts de** A. Il y en a $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$, soit $\boxed{\dfrac{n!}{(n-k)!}}$.

2. Quand l'ordre disparaît : les parties

Exercice 3 – Changer le point de vue

Avec les lettres $\{A, B, C\}$:

1. Lister toutes les parties à deux éléments.
   Les parties à 2 éléments de $\{A, B, C\}$ sont : $\{A, B\}$,$\{A, C\}$,$\{B, C\}$.
   Il y en a $\binom{3}{2}$ soit 3.
2. Comparer avec la liste des mots de longueur 2 sans répétition. Expliquer pourquoi les deux situations ne conduisent pas au même nombre.
   Les mots de longueur 2 (sans répétition) sont :
   AB, AC, BA, BC, CA, CB.
   Dans une partie, l'ordre ne compte pas. En effet, $\{A, B\}$=$\{B, A\}$.

Exercice 5 – Un cas particulier

On considère l'ensemble $E = \{A, B, C, D\}$.
Lister toutes les parties de E à k éléments pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. En déduire le nombre total de parties de E.

Il y a 1 partie à 0 élément de E : $\emptyset$.
Il y a 4 parties à 1 élément de E : $\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}$.
Il y a 6 parties à 2 éléments de E :
$\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$, $\{C, D\}$.
Il y a 4 parties à 3 éléments de E :
$\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$.
Il y a 1 partie à 4 éléments de E : $\{A, B, C, D\}$.

Au total, il y a $1 + 4 + 6 + 4 + 1$, soit 16 parties de E : $\text{Card}(\mathscr{P}(E)) = 16$.

Exercice 6 – Un cas général

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère à présent un ensemble E à n éléments.

1. Soit k un entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Quel est le nombre de parties à k éléments de E ?
   Il y a $\binom{n}{k}$ parties à k éléments de E.
2. En déduire le nombre total de parties de E.
   Au total il y a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ parties de E : $\boxed{\operatorname{Card}(\mathscr{P}(E)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.}$
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$ et conclure.
   On a
   $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} \\ &= (1+1)^n && \text{\# binôme de Newton} \\ &= 2^n\end{aligned}$$
   Il y a donc 2^n parties de E : $\boxed{\operatorname{Card}(\mathscr{P}(E)) = 2^n.}$

3. Les permutations

Exercice 6 bis – Introduction aux permutations

On considère un ensemble $E = \{a, b, c\}$.

1. Qu'appelle-t-on une permutation de E ?
   Une permutation de E est une application bijective de E dans E.
2. Lister toutes les permutations de E.
   $$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & b \\ c & \mapsto & c \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & a \\ b & \mapsto & c \\ c & \mapsto & b \end{array} \qquad \varphi_3 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & b \\ b & \mapsto & a \\ c & \mapsto & c \end{array}$$
   $$\varphi_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & b \\ b & \mapsto & c \\ c & \mapsto & a \end{array} \qquad \varphi_5 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & c \\ b & \mapsto & a \\ c & \mapsto & b \end{array} \qquad \varphi_6 : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ a & \mapsto & c \\ b & \mapsto & b \\ c & \mapsto & a \end{array}$$
3. Expliquer pourquoi une permutation peut être vue comme une liste ordonnée contenant chaque élément de E une et une seule fois.
   On peut associer à une permutation φ la liste $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c))$. C'est une liste ordonnée contenant chaque élément de E une et une seule fois.
   On peut associer $\varphi_1 : (a, b, c) \mapsto (a, b, c)$ la liste (a, b, c).
   On peut associer $\varphi_2 : (a, b, c) \mapsto (a, c, b)$ la liste (a, c, b) etc.
4. En raisonnant sur le choix successif des images de a, b, c, déterminer le nombre total de permutations de E.
   Il y a 3 choix pour l'image de a (a, b ou c), 2 choix restants pour l'image de b et 1 choix restant pour l'image de c.
   Il y a donc $3 \times 2 \times 1 = 3!$ permutations de E.

Idée clé : une permutation est une liste sans répétition utilisant tous les éléments.

4. Compter en découpant : le raisonnement par partitions

Exercice 6 – Un premier découpage

On lance deux dés équilibrés.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles ?
   Ici on tient compte de l'ordre (résultat du dé1, résultat du dé2). Une issue est une 2-liste, un couple, de $E = [\![1, 6]\!]$. Il y a 6^2, soit 36 issues possibles.
2. Décomposer l'ensemble des issues selon qu'on obtient un double ou non.
   Il y a 6 issues qui correspondent à un double : $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$.
   Il y a 6×5 qui ne sont pas des doubles. Il s'agit du nombre de 2-liste d'éléments distincts de E.
3. Retrouver le nombre total.
   Il s'agit d'une partition de l'ensemble des issues et on retrouve le nombre total d'issues en sommant les deux cardinaux obtenus : $6+6\times5 = 36$.

Idée clé : si les ensembles sont **disjoints**, $A \cap B = \emptyset$, on a

$$\operatorname{Card}(A \bigsqcup B) = \operatorname{Card}(A) + \operatorname{Card}(B).$$

Exercice 7 – Positions et choix

Combien de mots de longueur 4 sur $\{A, B\}$ contiennent exactement deux lettres A ?

1. Décrire un mot par la position des lettres A.
   Le mot BABA peut être décrit par l'ensemble des positions de A : $\{2, 4\}$.
   Le mot AABB peut être décrit par l'ensemble $\{1, 2\}$ etc
2. Combien de choix possibles ?
   Il y a autant de mots qui respectent la condition que de parties à 2 éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. Il y en a donc $\binom{4}{2}$ soit 6.

Exercice 8 – La formule du crible

Dans une classe de 40 élèves :
- 22 font de l'anglais,
- 18 font de l'espagnol,
- 10 font les deux.

Combien d'élèves étudient une langue ? Combien n'en pratiquent pas ?

On note A l'ensemble des élèves qui font de l'anglais et E l'ensemble des élèves qui font de l'espagnol.
On a $\mathrm{Card}(A \cup E) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A \cap E) = 30$.
Il y a 30 élèves qui étudient une langue.
On a $\mathrm{Card}(\overline{A \cup E}) = 40 - \mathrm{Card}(A \cup E) = 40 - 30 = 10$.
Il y a 10 élèves qui n'étudient pas de langue.

5. Exercices supplémentaires

Exercice 1 - Compter les permutations

1. **Permutations simples** Combien de mots différents peut-on former en utilisant toutes les lettres du mot :

   LIVRE

   Le mot LIVRE contient 5 lettres distinctes. On peut former 5! mots en utilisant toutes les lettres de LIVRE, chacun correspondant à une permutation de l'ensemble $\{L, I, V, R, E\}$.

2. **Permutations avec répétitions** Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot :

   STATISTIQUE

   Si toutes les lettres étaient distinctes, on pourrait former 11! mots. Ici, certaines lettres sont identiques et dans ce calcul, on compte plusieurs fois le même mot. Par exemple, échanger deux T entre eux ne crée pas un nouveau mot, mais dans 11!, ces échanges sont comptés.
   Regardons les répétitions :
   - Les 3 T peuvent être permutés entre eux de 3! façons,
   - Les 2 S peuvent être permutés entre eux de 2! façons,
   - Les 2 I peuvent être permutés entre eux de 2! façons.

   Chaque mot distinct est donc compté $3! \times 2! \times 2!$ fois. Pour obtenir le nombre réel de mots différents, on divise par ce facteur de surcomptage. On peut donc former $\dfrac{11!}{3! \times 2! \times 2!.}$ mots avec les lettres de STATISTIQUE.

   Alternative : Raisonner par rapport à la position des lettres dans le mot :

   Il y a $\binom{11}{3}$ façons de placer les trois T.
   Une fois les T placés, il y a $\binom{8}{2}$ façons de placer les deux S, puis $\binom{6}{2}$ façons de placer les deux I. Pour chaque placement des lettres $\{T, S, I\}$, il reste 4! façons de placer les lettres restantes $\{A, Q, U, E\}$.
   Au total, il y a $\binom{11}{3} \times \binom{8}{2} \times \binom{6}{2} \times 4! = \frac{11!}{3! \times 2! \times 2!}$ anagrammes du mot STATISTIQUE.

3. **Chiffres distincts** Combien de nombres de **4 chiffres distincts** peut-on former avec les chiffres :

   $$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

   (aucune répétition n'est autorisée) ?
   À chaque nombre vérifiant la contrainte, on peut associer une 4-liste sans répétition de $[\![1;5]\!]$. Il y a donc $5 \times 4 \times 3 \times 2$ soit 120 nombres de 4 chiffres distincts que l'on peut former avec les chiffres $1, 2, 3, 4$.

4. **Contrainte de position** Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot :

   MATHS

   si la lettre **M doit être en première position** ?
   Chaque mot commençant par M correspond à une permutation des lettres ATHS. Il y en a 4!.

5. **Lettres côte à côte** Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot :

   PROBLEME

si les lettres **P et R doivent être côte à côte** ?

Un tel mot contient soit le bloc PR soit le bloc RP. Si le mot contient PR, ce mot est une permutation des motifs PR,O,B,L,E,M,E. Il y en a $\frac{7!}{2!}$ (cf (2) STATISTIQUE).

De même, il existe $\frac{7!}{2!}$ permutations des motifs RP,O,B,L,E,M,E.

Au total, on peut former $\frac{7!}{2!} + \frac{7!}{2!}$, soit 7!, mots avec les lettres du mot PROBLEME si les lettres P et R doivent être côte à côte.

6. **Lettres non voisines** Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot :

   ALGEBR

   si les lettres **A et E ne doivent pas être voisines** ?

7. **Permutations circulaires** Combien de façons différentes peut-on disposer 7 personnes autour d'une table ronde ?

8. **Contraintes multiples** Combien de mots différents peut-on former avec les lettres du mot :

   INFORMATIQUE

   si :
   — les lettres **I sont côte à côte**,
   — et la lettre **F ne peut pas être en première position** ?

Exercice 2 - Lancer de dé On lance un dé à six faces deux fois.

1. Expliciter les résultats possibles. Combien y a-t-il d'issues ?
2. Combien d'issues donnent une somme égale à 7 ?

Exercice 3 - Cas disjoints On considère les entiers de 1 à 100.

1. Combien sont pairs ?
2. Combien sont multiples de 5 ?
3. Combien sont pairs ou multiples de 5 ?

Exercice 4 - Partition Soit E l'ensemble des mots de longueur 3 sur $\{a, b, c\}$.

1. Partitionner E selon le nombre de lettres distinctes.
2. Dénombrer chaque partie.
3. Retrouver le cardinal de E.

Exercice 5 - Complémentaire Combien y a-t-il de mots de longueur 5 sur $\{0, 1\}$ contenant au moins un 1 ?

Exercice 6 - Trinômes Cette année, il y a 26 étudiants en TSI1 et 24 en TSI2.
— Combien de groupes de 3 étudiants peut-on former en TSI1 ?
— Combien de groupes de 2 étudiants de TSI1 et 1 étudiant de TSI2 peut-on former ?

Exercice 7 - Partition par cardinal On considère les mots de longueur 5 sur $\{0, 1\}$.

1. Classer ces mots selon le nombre de 1.
2. Dénombrer chaque classe.
3. Retrouver le cardinal total.

Exercice 8 - Identités binomiales

1. Donner une interprétation combinatoire de $\binom{n}{k}$.
2. Justifier $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exercice 9 - Complémentaire et coefficients binomiaux Parmi les mots de longueur 8 sur $\{a, b\}$,

1. Combien contiennent au moins un a ?
2. Combien contiennent au plus deux a ?

Exercice 10 - Comités On dispose de 6 hommes et 4 femmes.

1. Combien de comités de 5 personnes peut-on former ?
2. Combien contiennent exactement 2 femmes ?
3. Au moins 3 femmes ?