

Feuille d'exercices n°13

Nombres réels

Exercice 1. Montrer que la somme (resp. le produit) de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.

Exercice 2. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.

Exercice 3. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = nf(1)$.
Généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = xf(1)$.

Exercice 5. Soient a et b deux réels. Les parties suivantes de \mathbb{R} sont-elle majorées? minorées? Préciser, si elles existent, leurs bornes supérieure et inférieure.

$$A = \{a + bn \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{a + (-1)^n b \mid n \in \mathbb{N}\},$$

$$C = \left\{a + \frac{b}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Exercice 6. On note

$$E = \left\{ \frac{x+1}{x+2} \mid x \leq -3 \right\}.$$

1. Montrer que E est une partie bornée de \mathbb{R} .
2. En déduire que E admet une borne inférieure et une borne supérieure, et les déterminer.
3. L'ensemble E admet-il un plus grand élément? un plus petit élément?

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Combien y a-t-il d'entiers naturels compris entre 1 et n ? entre 1 et x ?
2. Combien y a-t-il d'entiers naturels compris entre 0 et n ? entre 0 et x ?
3. Combien y a-t-il d'entiers naturels pairs compris entre 0 et x ?
Combien y a-t-il d'entiers naturels impairs compris entre 0 et x ?
4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de multiples de p compris entre 0 et x ?

Exercice 8. Montrer que l'équation $x^3 - x - 1 = 0$ admet une unique racine dans \mathbb{R} . En donner un encadrement à 10^{-3} près.