

Feuille d'exercices n°14

Suites réelles

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n.$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est strictement positif.
3. Étudier les variations de la suite (u_n) .
4. Que peut-on en déduire ?

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

Exercice 6. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 6 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8.$$

3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim v_n$.

Exercice 7. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n},$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 8. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par excès.

Exercice 9. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et les relations

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1 \leq v_n$.
2. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

Exercice 11. En utilisant les définitions du cours, montrer que :

1. $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. $(\sin(n\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .

Exercice 12. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lorsque :

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $u_n = n^2 + n$ | 7. $u_n = 2^n - 3^n$ | 13. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ |
| 2. $u_n = n^2 - n$ | 8. $u_n = \frac{2^n + 5^n}{7^n}$ | 14. $u_n = n - \cos(n)$ |
| 3. $u_n = \frac{2}{n+2}$ | 9. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$ | 15. $u_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$ |
| 4. $u_n = \frac{n^2 + 2}{n+1}$ | 10. $u_n = n - \sqrt{n}$ | 16. $u_n = n^2 \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$ |
| 5. $u_n = \frac{4n^2 - n}{5n^2 + 1}$ | 11. $u_n = n - e^n$ | 17. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |
| 6. $u_n = \frac{3}{0.5^n}$ | 12. $u_n = n^2 - \ln(n)$ | 18. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ |

Exercice 13. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que : $u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$.
2. En déduire la limite de la suite $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

Exercice 14. Soient f la fonction définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de la fonction f .

1. Calculer les limites de f .
2. Étudier les variations de f , puis tracer \mathcal{C}_f .
3. En utilisant \mathcal{C}_f et la droite d'équation $y = x$, placer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'axe (Ox) .
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
6. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie B : Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide d'une suite géométrique.

Soient $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression du terme général de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1 - (\frac{1}{2})^{2^n}}$.
4. Retrouver le résultat de la question A.6.

Exercice 15. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$.
3. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}$.

Exercice 16. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (on commencera par étudier la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$.
3. En déduire la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 17. (Irrationalité de e) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

1. Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite.
2. On admet que leur limite commune est e . On veut montrer que $e \notin \mathbb{Q}$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $u_q < e < v_q$. Conclure.

Exercice 18. (Moyenne arithmético-géométrique)

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite et que cette limite appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{ab}; \frac{a+b}{2}\right]$.

Exercice 19. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Les propositions A et B sont-elles équivalentes? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre?

- | | | |
|--|----|----------------------|
| 1. $A : u_n = o(v_n)$ | et | $B : u_n = O(v_n)$. |
| 2. $A : u_n \sim v_n$ | et | $B : u_n = O(v_n)$. |
| 3. $A : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$, où $w_n = o(v_n)$ | et | $B : u_n \sim v_n$. |

Exercice 20. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

1. Montrer que $n^\alpha = o(n^\beta)$.
2. Donner un équivalent simple de $n^\alpha + n^\beta$.

Exercice 21. Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = (2n+1) \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ | 2. $u_n = \frac{\ln(n+n^2)}{\ln(n)}$ |
| 3. $u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ | 4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$ |
| 5. $u_n = \sqrt[n]{n}$ | 6. $u_n = \frac{2^{n+4} - 5^{n+4}}{2^n - 5^n}$ |
| 7. $u_n = (5n+1)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)$ | 8. $u_n = \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$ |
| 9. $u_n = n^2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1 \right)$ | 10. $u_n = \frac{(2n^2+1)^5}{(n-2n^5)^2}$ |

Exercice 22. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies? Justifier.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $n + \frac{1}{2} \sim n$ | 2. $\sqrt{n + \frac{1}{2}} \sim \sqrt{n}$ |
| 3. $e^{n+\frac{1}{2}} \sim e^n$ | 4. $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \sim \ln(n)$. |

Exercice 23. Déterminer un équivalent simple et étudier la convergence des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = \frac{2n^2 + 100}{n^3 + 3n + 5}$ | 2. $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n}$ |
| 3. $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$ | 4. $u_n = \frac{(1 + 2 + \dots + n)^3}{(n^3 - 3n + 1)^2}$ |
| 5. $u_n = \frac{an^2 + bn + c}{n + 1000}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) | 6. $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ |
| 7. $u_n = \frac{n + 1000}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ | 8. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$ |
| 9. $u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}$ | 10. $u_n = \frac{n^{1000} + 2^n}{3^{-n} + (n+2)^{1000}}$ |
| 11. $u_n = \frac{(1 + 2 + \dots + n)^5}{(2n^5 - 3n + 1)^2}$ | 12. $u_n = \frac{(2n+1)^4 \left(e^{\frac{1}{2n}} - 1 \right)}{(n^2 + n + 1)^3}$ |
| 13. $u_n = \ln(n^2 + 1) - \ln(n^2)$ | 14. $u_n = \cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1$ |