

Feuille d'exercices n°14 – Correction

Suites réelles

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

1. Démonstration par récurrence :

Pour tout $n \in \mathcal{P}_n$: $2 \leq u_n \leq 3$.

Initialisation : $u_0 = 2$, donc $2 \leq u_0 \leq 3$ et \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n est vraie.

$$\begin{aligned} 2 \leq u_n \leq 3 &\implies \frac{1}{2} \geq \frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{3} \\ &\implies -\frac{3}{2} \leq -\frac{3}{u_n} \leq -1 \\ &\implies \frac{5}{2} \leq 4 - \frac{3}{u_n} \leq 3 \\ &\implies 2 \leq u_{n+1} \leq 3 \quad (\text{car } 2 \leq \frac{5}{2}). \end{aligned}$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 4 - \frac{3}{u_n} - u_n \\ &= -\frac{u_n^2 - 4u_n + 3}{u_n} \\ &= -\frac{(u_n - 3)(u_n - 1)}{u_n} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

car $2 \leq u_n \leq 3$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ la limite de (u_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - \frac{3}{u_n}$. Par passage à la limite, on obtient $\ell = 4 - \frac{3}{\ell}$, c'est-à-dire $\ell^2 - 4\ell + 3 = 0$. Donc $\ell = 1$ ou $\ell = 3$.

De plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leq u_n \leq 3$. Par passage à la limite, on a $2 \leq \ell \leq 3$. D'où $\ell = 3$.

Conclusion : $\lim u_n = 3$.

Exercice 2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n.$$

1. Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est strictement positif.
3. Étudier les variations de la suite (u_n) .
4. Que peut-on en déduire ?

1. $u_2 = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{8}$ et $u_4 = \frac{4}{2 \times 3} u_3 = \frac{1}{4}$.
2. Démonstration par récurrence sans difficulté.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{n+1}{n+n}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et $u_{n+1} \leq u_n$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante.

4. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$.

Par passage à la limite, on obtient $\ell = \frac{1}{2} \ell$, donc $2\ell = \ell$. D'où $\ell = 0$

Conclusion : $\lim u_n = 0$.

Exercice 3. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + 2n + 3.$$

1. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.
3. Que peut-on en déduire ?

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2n + 3$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Conclusion : La suite (u_n) est croissante.

2. Démonstration par récurrence :

$u_0 = 1$ donc $u_0 > 0^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > n^2$. On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$, donc $u_{n+1} > n^2 + 2n + 3$, donc $u_{n+1} > (n+1)^2 + 2$, d'où $u_{n+1} > (n+1)^2$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > n^2$ et $\lim n^2 = +\infty$. D'après le théorème de comparaison des limites, on a $\lim u_n = +\infty$.

Exercice 4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

1. Indication : Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3 - \frac{8}{3+u_n}$.

Démonstration par récurrence.

$u_0 = 2$, donc $u_0 > 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n > 1$.

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\implies 3 + u_n > 4 \\ &\implies \frac{1}{3 + u_n} < \frac{1}{4} \\ &\implies \frac{-8}{3 + u_n} > -2 \\ &\implies 3 - \frac{8}{3 + u_n} > 1 \\ &\implies u_{n+1} > 1. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n} - u_n \\ &= \frac{1 - u_n^2}{3 + u_n}. \end{aligned}$$

Or $u_n > 1$ donc $1 - u_n^2 < 0$ et $3 + u_n > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n < 0$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est strictement décroissante.

Exercice 5. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{5} u_n + \frac{2}{5}.$$

1. Montrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim u_n$.

1. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{2}$.
 $u_0 \leq \frac{1}{2}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq 1$. Alors :

$$\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \leq \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5},$$

donc $u_{n+1} \leq \frac{5}{10}$.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{2}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \frac{2(1-2u_n)}{5}$.
Or $u_n \leq \frac{1}{2}$ donc $-2u_n \geq -1$, d'où $1 - 2u_n \geq 0$ et $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. Elle est donc convergente, d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ sa limite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$. Par passage à la limite, on a $\ell = \frac{1}{5}\ell + \frac{2}{5}$. D'où $\ell = \frac{1}{2}$.

Conclusion : $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 6. On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_0 = 6 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2.$$

1. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 8]$.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8.$$

3. Que peut-on en déduire ? Déterminer $\lim v_n$.

1. La fonction f est dérivable sur $[0, 8]$ et pour tout $x \in [0, 8]$,
 $f'(x) = 1,4 - 0,1x$.
 $f'(x) > 0 \iff 14 > x$.
La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0, 8]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n : \ll 0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8. \gg$
Initialisation : $v_0 = 6$ et $v_1 = 6,6$, donc $0 \leq v_0 < v_1 \leq 8$ et \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n soit vraie. On sait que

$$0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8,$$

donc

$$f(0) \leq f(v_n) < f(v_{n+1}) \leq f(8)$$

(car f est strictement croissante sur l'intervalle $[0, 8]$),
c'est-à-dire

$$0 \leq v_{n+1} < v_{n+2} \leq 8.$$

D'où \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v_n < v_{n+1} \leq 8$.

3. D'après ce qui précède, la suite (v_n) est croissante et majorée par 8. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone. On note ℓ la limite de (v_n) .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$.

Par passage à la limite, on obtient $\ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2$, donc $40\ell - 5\ell^2 = 0$, donc $(8 - \ell)\ell = 0$, d'où $\ell = 0$ ou $\ell = 8$.

Comme $v_0 = 6$ et (v_n) strictement croissante, $\ell \geq 6$. D'où $\ell = 8$.

Conclusion : $\lim v_n = 8$.

Exercice 7. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n},$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par défaut.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \geq u_n$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \\ &= u_{n+1} - u_n - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{n - 2(2n+1)}{n(2n+1)(2n+2)} \\ &= -\frac{3n+2}{n(2n+1)(2n+2)}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} \leq v_n$. Donc la suite (v_n) est décroissante.

De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, notée ℓ , et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

En particulier, $u_{100} \leq \ell \leq u_{100} + 10^{-2}$. On en déduit une approximation par défaut de ℓ à 10^{-2} près : 0,69.

Exercice 8. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En utilisant votre calculatrice, donner une approximation de leur limite à 10^{-2} près par excès.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$. La suite (u_n) est donc croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n} \right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est donc décroissante.

$\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{1}{n} = 0$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite, notée ℓ , et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

En particulier, $u_{100} \leq \ell \leq u_{100} + 10^{-2}$. On en déduit une approximation par excès de ℓ à 10^{-2} près : 1,65.

Exercice 9. On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 2$ et les relations

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1 \leq v_n$.
2. Étudier la suite $(w_n) = (v_n - u_n)$.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et déterminer leur limite commune.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}_n : \ll u_n \leq 1 \leq v_n \gg$
Initialisation : $u_0 \leq 1 \leq v_0$ donc \mathcal{P}_0 est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que \mathcal{P}_n est vraie.

$$\begin{aligned} u_n \leq 1 \leq v_n &\implies 3u_n \leq 3 \leq 3v_n \\ &\implies 3u_n + 1 \leq 4 \leq 3v_n + 1 \\ &\implies \frac{3u_n + 1}{4} \leq 1 \leq \frac{3v_n + 1}{4} \\ &\implies u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1}. \end{aligned}$$

Donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1 \leq v_n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{3}{4}w_n$. La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1 - u_n}{4} \geq 0$. Donc la suite (u_n) est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1 - v_n}{4} \leq 0$. Donc la suite (v_n) est décroissante.

De plus $\lim (v_n - u_n) = \lim w_n = \lim 2 \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ car $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes et convergent vers une limite commune notée ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$. Par passage à la limite, on obtient $\ell = \frac{3\ell + 1}{4}$, d'où $\ell = 1$.

Exercice 10. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante à partir d'un certain rang.
 $\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, u_{n+1} = u_n.$

2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang.
 $\iff \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n.$
3. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
 $\iff \exists n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n.$
4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
 $\iff \forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$
5. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.
 $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, |u_n| \leq \varepsilon$
 $\iff \exists \varepsilon > 0, \forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0 \text{ et } |u_n| > \varepsilon.$

Exercice 11. En utilisant les définitions du cours, montrer que :

1. $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.
2. $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
3. $(\sin(n\frac{\pi}{2}))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ .
Soit $\varepsilon > 0$.
 $\lim u_{2n} = \ell$, donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } 2n \geq n_1,$
 $|u_{2n} - \ell| \leq \varepsilon \quad (1).$
 $\lim u_{2n+1} = \ell$, donc $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } 2n + 1 \geq n_2,$
 $|u_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon \quad (2).$
On pose $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geq n_0$.
Si n est pair, alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ d'après (1) (car $n \geq n_1$).
Si n est impair, alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$ d'après (2) (car $n \geq n_2$).
Ainsi, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$
D'où $\lim u_n = \ell$.

Exercice 12. Déterminer la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

lorsque :

- | | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|---|
| 1. $u_n = n^2 + n$ | 7. $u_n = 2^n - 3^n$ | 13. $u_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$ |
| 2. $u_n = n^2 - n$ | 8. $u_n = \frac{2^n + 5^n}{7^n}$ | 14. $u_n = n - \cos(n)$ |
| 3. $u_n = \frac{2}{n+2}$ | 9. $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k}$ | 15. $u_n = \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5}$ |
| 4. $u_n = \frac{n^2+2}{n+1}$ | 10. $u_n = n - \sqrt{n}$ | 16. $u_n = n^2 \lfloor \frac{1}{n} \rfloor$ |
| 5. $u_n = \frac{4n^2 - n}{5n^2 + 1}$ | 11. $u_n = n - e^n$ | 17. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |
| 6. $u_n = \frac{3}{0.5^n}$ | 12. $u_n = n^2 - \ln(n)$ | 18. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - n$ |

- $\lim u_n = +\infty$
- $\lim u_n = \lim n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) = +\infty$
- $\lim u_n = \lim \frac{2}{n+2} = 0$
- $\lim u_n = \lim n \left(\frac{1 + \frac{2}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}}\right) = +\infty$
- $\lim u_n = \lim \frac{4 - \frac{1}{n}}{5 + \frac{1}{n^2}} = \frac{4}{5}$
- $\lim 0.5^n = 0^+$, car $-1 < 0.5 < 1$, donc $\lim u_n = +\infty$
- $\lim u_n = \lim 2^n - 3^n = \lim 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$
- $\lim u_n = \lim \left(\frac{2}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$
- $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - (1/3)}$, donc $\lim u_n = \frac{3}{2}$.
- $\lim u_n = \lim n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$ par croissances comparées.
- $\lim u_n = \lim e^n \left(\frac{n}{e^n} - 1\right) = -\infty$ par croissances comparées.
- $\lim u_n = \lim n^2 \left(1 - \frac{\ln n}{n^2}\right) = +\infty$ par croissances comparées.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{-1}{n+2} \leq \frac{(-1)^n}{n+2} \leq \frac{1}{n+2}$, or $\lim \frac{-1}{n+2} = \lim \frac{1}{n+2} = 0$, donc $\lim \frac{(-1)^n}{n+2} = 0$ d'après le théorème d'encadrement.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n - \cos(n) \geq n - 1$, or $\lim n - 1 = +\infty$, donc $\lim n - \cos(n) = +\infty$ par comparaison.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^2 + \sin(n)}{n+5} \geq \frac{n^2 - 1}{n+5}$, or $\lim \frac{n^2 - 1}{n+5} = +\infty$, donc $\lim \frac{n^2 + \sin(n)}{n+5} = +\infty$ par comparaison.
- Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = 0$. On en déduit $\lim u_n = 0$.

17.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}, \end{aligned}$$

donc $\lim u_n = 0$.

18.

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n^2 + n + 1} - n \\ &= \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1}, \end{aligned}$$

donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 13. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. Montrer qu'il existe trois réels a , b et c tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}.$$

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1) = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1/2 & (n = 0) \\ b = -1 & (n = -1) \\ c = 1/2 & (n = -2) \end{cases}$$

Réciproquement, on vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n+2}.$$

2. En déduire la limite de la suite $v_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right). \end{aligned}$$

Conclusion : $\lim v_n = \frac{1}{4}$.

Exercice 14. Soient f la fonction définie sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie A : Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide de la fonction f .

1. Calculer les limites de f .

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} x^2 = \frac{1}{4} \text{ et } \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} 2x - 1 = 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow (1/2)^+} f(x) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

2. Étudier les variations de f , puis tracer \mathcal{C}_f .

Pour tout $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[x^2]' \times [2x-1] - [x^2] \times [2x-1]'}{(2x-1)^2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

3. En utilisant \mathcal{C}_f et la droite d'équation $y = x$, placer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur l'axe (Ox) .
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

On pose $\mathcal{P}_n : \ll u_n > 1 \gg$

Initialisation : \mathcal{P}_0 est vraie car $u_0 = 2$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathcal{P}_n vraie et on montre $\mathcal{P}_{n+1} : \ll u_{n+1} > 1 \gg$.

On suppose que $u_n > 1$.

Donc $f(u_n) > f(1)$ car la fonction $x \mapsto f(x)$ est strictement croissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. D'où $u_{n+1} > 1$ et \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

5. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= f(u_n) - u_n \\ &= \frac{u_n^2}{2u_n - 1} - u_n \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n}{2u_n - 1} \\ &= \frac{u_n(-u_n + 1)}{2u_n - 1} \end{aligned}$$

Or $u_n > 1$ d'après Q4, donc $u_n > 0$, $-u_n + 1 < 0$ et $2u_n - 1 > 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$.

Conclusion : La suite (u_n) est décroissante.

6. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

La suite (u_n) étant décroissante et minorée, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone : $\lim u_n = \ell$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$.
Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$. Par passage à la limite, on obtient $\ell \geq 1$. D'où $\ell = 1$.

Conclusion : $\lim u_n = 1$.

Partie B : Étude de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à l'aide d'une suite géométrique.

Soient $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les suites telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_n).$$

1. Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique. En déduire l'expression du terme général de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) \\ &= \ln\left(\frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}}\right) \\ &= \ln(u_{n+1} - 1) - \ln(u_{n+1}) \\ &\text{(possible d'après Q4)} \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2}{2u_n - 1} - 1\right) - \ln\left(\frac{u_n^2}{2u_n - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{u_n^2 - 2u_n + 1}{2u_n - 1}\right) - \ln\left(\frac{u_n^2}{2u_n - 1}\right) \\ &= [\ln(u_n^2 - 2u_n + 1) - \ln(2u_n - 1)] - [\ln(u_n^2) - \ln(2u_n - 1)] \\ &\text{(possible d'après Q4)} \\ &= \ln((u_n - 1)^2) - \ln((u_n)^2) \\ &= 2[\ln(u_n - 1) - \ln(u_n)] \\ &\text{(possible d'après Q4)} \\ &= 2 \ln\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) \\ &= 2 \ln(v_n) \\ &= 2w_n \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = 2w_n$. La suite (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \times 2^n = -\ln(2) \times 2^n$.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = -\ln(2) \times 2^n$.

2. En déduire l'expression du terme général de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
On sait que $w_n = \ln(v_n)$ donc

$$\begin{aligned} v_n &= e^{w_n} \\ &= e^{-\ln(2) \times 2^n} \\ &= \frac{1}{e^{\ln(2) \times 2^n}} \\ &= \frac{1}{(e^{\ln(2)})^{2^n}} \\ &= \frac{1}{2^{2^n}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

On sait que $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ donc $u_n \times v_n = u_n - 1$ donc $(v_n - 1)u_n = -1$ donc

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{-1}{v_n - 1} \\ &= \frac{1}{1 - v_n} \\ &= \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

4. Retrouver le résultat de la question A.6.

$$\lim \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n} = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1 \text{ donc } \lim u_n = \frac{1}{1-0} = 1.$$

Exercice 15. En utilisant le théorème de la limite monotone, montrer la convergence des suites suivantes :

1. $u_n = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{5}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right).$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{2n+3} < 1$,

donc $u_{n+1} < u_n$. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.$$

La suite (u_n) est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n+1}$,

donc $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+1}$, donc $u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$. La suite (u_n) est majorée par 1.

La suite (u_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente d'après le théorème de la limite monotone.

3. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn}.$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(n+1)} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)}. \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{1}{n(n+1)^2} \leq \frac{1}{kn(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$.

Donc $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)} \leq \frac{1}{n+1}$,

donc $-\frac{1}{(n+1)^2} \geq -\sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)} \geq -\frac{1}{n+1}$ et

$$0 \geq \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{kn(n+1)} \geq \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

La suite (u_n) est donc décroissante. On constate de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. La suite (u_n) est donc minorée par 0. Elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone.

Exercice 16. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \text{ et } v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes (on commencera par étudier la suite $(v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$).
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$.
3. En déduire la limite des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. On introduit la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_n - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \frac{1}{12}w_n$. La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{12}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = w_0 \times q^n = \frac{11}{12^n}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n \\ &= \frac{v_n - u_n}{4} \\ &= \frac{w_n}{4} \\ &= \frac{11}{4 \times 12^n} > 0. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$. La suite (u_n) est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2u_n + v_n}{4} - v_n \\ &= -\frac{2}{3}(v_n - u_n) \\ &= -\frac{2 \times 11}{3 \times 12^n} < 0. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leq v_n$. La suite (v_n) est décroissante. De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{11}{12^n} = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes. Elles convergent vers une limite commune que l'on note ℓ .

- On démontre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$.
- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $8u_n + 3v_n = 44$. Par passage à la limite, on obtient $8\ell + 3\ell = 44$, c'est-à-dire $\ell = 4$.

Exercice 17. (Irrationalité de e) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

- Montrer que ces deux suites convergent vers une même limite.
- On admet que leur limite commune est e . On veut montrer que $e \notin \mathbb{Q}$. On raisonne pour cela par l'absurde en supposant que $e = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $u_q < e < v_q$. Conclure.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n \cdot n!} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1)(n+1)!} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} < v_n$. La suite (v_n) est strictement décroissante. De plus, $\lim (v_n - u_n) = \lim \frac{1}{n \cdot n!} = 0$. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent vers une limite commune : e .

- On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq e \leq v_n$. En particulier,

$$u_q < u_{q+1} \leq e \leq v_{q+1} < v_q.$$

Donc

$$\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + \frac{1}{q \cdot q!},$$

donc

$$q \cdot q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} < p \cdot q! < q \cdot q! \sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} + 1,$$

d'où

$$q \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} < p \cdot q! < q \sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} + 1.$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$, $\frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. Donc $\sum_{k=0}^q \frac{q!}{k!} \in \mathbb{N}$. On a montré que l'entier $p \cdot q!$ est compris strictement entre deux entiers consécutifs. Ce qui est impossible, donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 18. (Moyenne arithmético-géométrique)

1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite et que cette limite appartient à l'intervalle $\left[\sqrt{ab}; \frac{a+b}{2}\right]$.

Correction.

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
Si $0 < x < y$, alors $0 < x^2 < xy$, donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{xy}$, soit $x < \sqrt{xy}$.
Si $0 < x < y$, alors $x + y < 2y$ et $\frac{x+y}{2} < y$.
Si $0 < x < y$, alors :

$$\begin{aligned} \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} &\iff xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &\iff 4xy < x^2 + 2xy + y^2 \\ &\iff 0 < x^2 - 2xy + y^2 \\ &\iff 0 < (x-y)^2 \end{aligned}$$

Or $x \neq y$, donc $(x-y)^2 > 0$ est vraie, et par équivalence, on a montré que $\sqrt{xy} < \frac{x+y}{2}$.

Conclusion : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 < x < y \implies x < \sqrt{xy} < \frac{x+y}{2} < y.$$

2. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < v_n$.
Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \sqrt{u_n v_n} < \frac{u_n + v_n}{2} < v_n$ (d'après le résultat de la question précédente), c'est-à-dire

$$0 < u_n < u_{n+1} < v_{n+1} < v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus

$$a \leq u_n < v_n \leq b \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par b , donc convergente : $\lim u_n = \ell$.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par a , donc convergente : $\lim v_n = \ell'$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$. Par passage à la limite, on obtient $\ell' = \frac{\ell + \ell'}{2}$ et donc $\ell = \ell'$.

Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite, ℓ .

On a donc montré que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes (puisque $\lim(u_n - v_n) = \ell - \ell = 0$). Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq \ell \leq v_n.$$

En particulier

$$u_1 \leq \ell \leq v_1 \quad \text{ie} \quad \sqrt{ab} \leq \ell \leq \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 19. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles. Les propositions A et B sont-elles équivalentes ? L'une d'entre elles implique-t-elle l'autre ?

- | | | |
|--|----|----------------------|
| 1. $A : u_n = o(v_n)$ | et | $B : u_n = O(v_n)$. |
| 2. $A : u_n \sim v_n$ | et | $B : u_n = O(v_n)$. |
| 3. $A : \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$, où $w_n = o(v_n)$ | et | $B : u_n \sim v_n$. |

Correction.

- $A \implies B$ (théorème du cours : toute suite convergente est bornée - La réciproque est fausse)
- $A \implies B$ (théorème du cours : toute suite convergente est bornée - La réciproque est fausse)
- $A \iff B$
Montrons que $A \implies B$: On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + w_n$, où $w_n = o(v_n)$. Alors $\lim \frac{u_n}{v_n} = \lim \frac{v_n + w_n}{v_n} = \lim 1 + \frac{w_n}{v_n} = 1$ car $w_n = o(v_n)$. Ainsi $u_n \sim v_n$.
Montrons que $B \implies A$: On suppose que $u_n \sim v_n$. On pose $w_n = u_n - v_n \forall n \in \mathbb{N}$. Montrons que $w_n = o(v_n)$. On a $\lim \frac{w_n}{v_n} = \lim \frac{u_n - v_n}{v_n} = \lim \frac{u_n}{v_n} - 1 = 0$ car $u_n \sim v_n$. Ainsi $w_n = o(v_n)$ et $u_n = v_n + w_n \forall n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$.

- Montrer que $n^\alpha = o(n^\beta)$.
 $\lim \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \lim \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} = 0$ car $\beta - \alpha > 0$. Ainsi $n^\alpha = o(n^\beta)$.
- Donner un équivalent simple de $n^\alpha + n^\beta$.
On a $n^\alpha + n^\beta \sim n^\beta$.

Exercice 21. Utiliser des équivalents ou des croissances comparées pour étudier la convergence des suites suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1. $u_n = (2n + 1) \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$ | 2. $u_n = \frac{\ln(n+n^2)}{\ln(n)}$ |
| 3. $u_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)}$ | 4. $u_n = n^{\frac{1}{\ln n}}$ |
| 5. $u_n = \sqrt[n]{n}$ | 6. $u_n = \frac{2^{n+4} - 5^{n+4}}{2^n - 5^n}$ |
| 7. $u_n = (5n + 1)^2 \ln\left(1 + \frac{1}{3n^2}\right)$ | 8. $u_n = \left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$ |
| 9. $u_n = n^2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - 1\right)$ | 10. $u_n = \frac{(2n^2 + 1)^5}{(n - 2n^5)^2}$ |

Correction.

- $u_n \sim 2n \times \frac{1}{n} \sim 2$ donc $\lim u_n = 2$.
- $u_n = \frac{\ln\left(n^2 \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n^2) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln(n)} \sim \frac{\ln(n^2)}{\ln(n)} \sim \frac{2 \ln(n)}{\ln(n)}$ donc $\lim u_n = 2$.
- $u_n \sim \frac{1}{1/n^2} \sim n^2$ donc $\lim u_n = +\infty$.
- $u_n = n^{\frac{1}{\ln(n)}} = e^{\frac{1}{\ln(n)} \times \ln(n)} = e$. La suite (u_n) est constante égale à e et $\lim u_n = e$.
- $u_n = \sqrt[n]{n} = e^{\frac{1}{n} \ln(n)}$. On a $\lim u_n = e^0 = 1$ par croissances comparées.
- $u_n \sim \frac{-5^{n+4}}{-5^n} \sim 5^4$ et $\lim u_n = 5^4 = 625$.
- $u_n \sim (5n)^2 \times \frac{1}{3n^2} \sim \frac{25}{3}$ donc $\lim u_n = \frac{25}{3}$.
- $u_n = e^{n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}$. On a $\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donc $n \ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) \sim n \times \frac{1}{n} \sim 1$ et donc $\lim u_n = e^1 = e$.
- $u_n \sim n^2 \times \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2}$ donc $\lim u_n = -\frac{1}{2}$.
- $u_n \sim \frac{(2n^2)^5}{(-2n^5)^2} \sim \frac{2^5 n^{10}}{2^2 n^{10}} \sim 8$ donc $\lim u_n = 8$.

Exercice 22. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ? Justifier.

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $n + \frac{1}{2} \sim n$ | 2. $\sqrt{n + \frac{1}{2}} \sim \sqrt{n}$ |
| 3. $e^{n+\frac{1}{2}} \sim e^n$ | 4. $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) \sim \ln(n)$. |

Correction.

- Vraie car $\lim \frac{n + \frac{1}{2}}{n} = \lim 1 + \frac{1}{2n} = 1$.
- Vraie car $\lim \frac{\sqrt{n + \frac{1}{2}}}{\sqrt{n}} = \lim \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} = \sqrt{1} = 1$

3. Fausse car $\lim \frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} = \lim e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \neq 1$
4. Vraie car $\ln\left(n + \frac{1}{2}\right) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)$
et $\lim \frac{\ln\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\ln(n)} = \lim 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}{\ln(n)} = 1$.

Exercice 23. Déterminer un équivalent simple et étudier la convergence des suites suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $u_n = \frac{2n^2 + 100}{n^3 + 3n + 5}$ | 2. $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n}$ |
| 3. $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}}$ | 4. $u_n = \frac{(1 + 2 + \dots + n)^3}{(n^3 - 3n + 1)^2}$ |
| 5. $u_n = \frac{an^2 + bn + c}{n + 1000}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) | 6. $u_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ |
| 7. $u_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ | 8. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ |
| 9. $u_n = \frac{(-1)^n n + 1}{n + \sqrt{n}}$ | 10. $u_n = \frac{n^{1000} + 2^n}{3^{-n} + (n+2)^{1000}}$ |
| 11. $u_n = \frac{(1 + 2 + \dots + n)^5}{(2n^5 - 3n + 1)^2}$ | 12. $u_n = \frac{(2n+1)^4 (e^{\frac{1}{2n}} - 1)}{(n^2 + n + 1)^3}$ |
| 13. $u_n = \ln(n^2 + 1) - \ln(n^2)$ | 14. $u_n = \cos\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - 1$ |

Correction.

1. $u_n = \frac{2n^2 + 100}{n^3 + 3n + 5} \sim \frac{2n^2}{n^3} \sim \frac{2}{n}$ donc $\lim u_n = 0$
2. $u_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n} \sim \frac{3^n}{3^n} \sim 1$ donc $\lim u_n = 1$
3. $u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n + (-1)^{n+1}} \sim \frac{2n}{3n} \sim \frac{2}{3}$ donc $\lim u_n = \frac{2}{3}$
4. $u_n = \frac{(1 + 2 + \dots + n)^3}{(n^3 - 3n + 1)^2} = \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3}{(n^3 - 3n + 1)^2} \sim \frac{\left(\frac{n^2}{2}\right)^3}{(n^3)^2} \sim \frac{1}{8}$ donc
 $\lim u_n = \frac{1}{8}$

5. $u_n = \frac{an^2 + bn + c}{n + 1000} \sim an$ si $a \neq 0$ (suite divergente)
 $u_n \sim b$ si $a = 0$ et $b \neq 0$ (suite convergente)
 $u_n \sim \frac{c}{n}$ si $a = b = 0$ et $c \neq 0$ (suite convergente)
6. $u_n \sim (-1)^n$ donc (u_n) n'admet pas de limite (suite divergente)
7. $u_n \sim 2\sqrt{n}$ et $\lim u_n = +\infty$ (suite divergente)
8. $u_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $\lim u_n = 0$ (suite convergente)
9. $u_n \sim \frac{(-1)^n n}{n} \sim (-1)^n$ donc (u_n) n'admet pas de limite (suite divergente)
10. $u_n \sim \frac{2^n}{n^{1000}}$ donc $\lim u_n = +\infty$ par croissances comparées
11. $u_n \sim \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^5}{(2n^5)^2} \sim \frac{\left(\frac{n^2}{2}\right)^5}{2^2 n^{10}} \sim \frac{1}{2^7} \sim \frac{1}{128}$ donc $\lim u_n = \frac{1}{128}$.
12. $u_n \sim \frac{(2n)^4 \times \frac{1}{2n}}{(n^2)^3} \sim \frac{8}{n^3}$ donc $\lim u_n = 0$
13. $u_n = \ln\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}$ et $\lim u_n = 0$.
14. $u_n \sim -\frac{\left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2}{2} \sim -\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2} \sim -\frac{1}{2n^2}$ et $\lim u_n = 0$