

Feuille d'exercices n°15

Calcul matriciel

Exercice 1. Écrire explicitement la matrice $A = (a_{ij})$ à n lignes et p colonnes dans les cas suivants :

1. $n = 4, p = 3$ et $a_{ij} = \min(i, j)$.
2. $n = 2, p = 3$ et $a_{ij} = j(-1)^i$.
3. $n = 5, p = 5$ et $a_{ij} = \delta_{ij}$,

où δ est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

4. $n = 4, p = 4$ et $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})ij$.
5. $n = 3, p = 3$ et $a_{ij} = \cos(\frac{i\pi}{3})\sin(\frac{j\pi}{3})$.

Exercice 2. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Parmi les calculs suivants, lesquels sont licites ? Le cas échéant, effectuer les calculs.

- | | | |
|----------------|----------------|-----------------|
| 1. $CF + 3I_3$ | 2. FC | 3. BDA |
| 4. $CD + F$ | 5. $DC - F$ | 6. $C^T E + DE$ |
| 7. $CD + E^2$ | 8. $ECD + E^T$ | 9. $BF B^T$ |

Exercice 3. Soient $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $E_{i,j}, E_{k,l}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ correspondantes. Calculer $E_{i,j} \times E_{k,l}$.

Exercice 4. Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer AB et BA .
2. Développer $(A + B)^2$.

Exercice 5. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_3$.

Exercice 6. 1. Calculer le produit suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Exercice 7. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A l'élément de \mathbb{K} défini par :

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Exercice 8. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Soit $A = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n}$. Calculer $A\bar{A}$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1} .

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coefficients de A^n lorsque :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

1. Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $A_\theta \times A_\varphi$.
2. Soit $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Calculer $(A_\theta)^n$.

Exercice 12. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On pose $N = A - I_3$. Déterminer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n + 3w_n \\ v_{n+1} = v_n + 2w_n \\ w_{n+1} = w_n \end{cases}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les expressions de u_n, v_n et w_n en fonction de n, u_0, v_0 et w_0 .

Exercice 13. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre, lorsque c'est possible, le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En déduire A^{-1} .

Exercice 14. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$\begin{array}{ll} 1. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 2. A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ 3. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ 5. A = \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 6. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 15. Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$\begin{array}{ll} 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 2. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ 3. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 4. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 5. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & 6. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 7. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 16. 1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 2I_n - A$. Montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$.

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2 . Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^2 = aA + bI_3$.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - A = 4I_n$. Montrer que A est inversible et déterminer une expression de A^{-1} en fonction de A et de I_n .

Exercice 17. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} .
2. Calculer $P^{-1}AP$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18. Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Exercice 19. Déterminer l'expression, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$\begin{array}{ll} 1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \\ 3. C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} & 4. D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 20. Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, x, -z)$$

et

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, y)$$