

## Feuille d'exercices n°15 – Correction

### Calcul matriciel

**Exercice 1.** Écrire explicitement la matrice  $A = (a_{ij})$  à  $n$  lignes et  $p$  colonnes dans les cas suivants :

1.  $n = 4, p = 3$  et  $a_{ij} = \min(i, j)$ .

2.  $n = 2, p = 3$  et  $a_{ij} = j(-1)^i$ .

3.  $n = 5, p = 5$  et  $a_{ij} = \delta_{ij}$ ,

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker défini par  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

4.  $n = 4, p = 4$  et  $a_{ij} = (1 - \delta_{ij})ij$ .

5.  $n = 3, p = 3$  et  $a_{ij} = \cos(\frac{i\pi}{3})\sin(\frac{j\pi}{3})$ .

1.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2.  $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3.  $A = I_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4.  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 0 & 12 \\ 4 & 8 & 12 & 0 \end{pmatrix}$

5.  $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 & -\sqrt{3}/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 2.** On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B = (1 \ 2 \ 3) \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 8 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Parmi les calculs suivants, lesquels sont licites ? Le cas échéant, effectuer les calculs.

- |                |                |                 |
|----------------|----------------|-----------------|
| 1. $CF + 3I_3$ | 2. $FC$        | 3. $BDA$        |
| 4. $CD + F$    | 5. $DC - F$    | 6. $C^T E + DE$ |
| 7. $CD + E^2$  | 8. $ECD + E^T$ | 9. $BF B^T$     |

1.  $CF$  est une matrice de taille  $2 \times 3$  et  $3I_3$  est de taille  $3 \times 3$ . Le calcul  $CF + 3I_3$  n'est pas défini.

2.  $\#\{\text{colonnes de } F\} \neq \#\{\text{lignes de } C\}$ . Le produit  $FC$  n'est donc pas défini.

3.  $BDA = (-53)$

4.  $CD$  est une matrice  $2 \times 2$  et  $F$  est une matrice  $3 \times 3$ . La somme n'est donc pas définie.

5.  $DC - F = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 24 \\ -1 & 18 & 57 \\ -2 & 3 & 33 \end{pmatrix}$

$$6. C^T E + DE = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 19 & 0 \\ 29 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7. CD + E^2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 18 & 60 \end{pmatrix}$$

$$8. ECD + E^T = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$$

$$9. BFB^T = (187)$$

**Exercice 3.** Soient  $i, j, k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $E_{i,j}, E_{k,l}$  les matrices élémentaires de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  correspondantes. Calculer  $E_{i,j} \times E_{k,l}$ .

On note  $P = E_{i,j} \times E_{k,l}$ .

Comme toutes les lignes de  $E_{i,j}$  sont nulles sauf la  $i$ -ème, il en est de même pour les lignes de  $P$ .

Comme toutes les colonnes de  $E_{k,l}$  sont nulles sauf la  $l$ -ième, il en est de même pour les colonnes de  $P$ .

Ainsi le seul coefficient éventuellement non nul de  $P$  est le coefficient d'indice  $(i, l) : P_{i,l} = \sum_{m=1}^n \delta_{m,j} \delta_{m,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ 1 & \text{si } j = k \end{cases}$ . On conclut que  $P = E_{i,l}$  si  $j = k$  et 0 sinon.

Conclusion :  $E_{i,j} \times E_{k,l} = \begin{cases} E_{i,l} & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

**Exercice 4.** Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer  $AB$  et  $BA$ .
2. Développer  $(A + B)^2$ .

1. On constate que  $AB \neq BA$ .
2.  $(A + B)^2 = (A + B) \times (A + B) = A^2 + AB + BA + B^2$ .

**Exercice 5.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des matrices  $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  telles que  $AM = 0_3$ .

Réponse : L'ensemble des matrices solutions est

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

**Exercice 6.** 1. Calculer le produit suivant

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

2. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices triangulaires supérieures. Par définition, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i > j$ , on a  $a_{i,j} = 0$  et  $b_{i,j} = 0$ . On note  $C = A \times B$ . Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i > j$ . Montrons que  $c_{i,j} = 0$ .

$$\begin{aligned} c_{i,j} &= \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \text{ (produit matriciel)} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{i,k} b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} b_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} 0 \times b_{k,j} + \sum_{k=i}^n a_{i,k} \times 0 \\ &\quad \text{car } i > k \qquad \text{car } k \geq i > j \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i > j$ ,  $c_{i,j} = 0$ . La matrice  $C$  est donc triangulaire supérieure.

Conclusion : Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

**Exercice 7.** Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle trace de  $A$  l'élément de  $\mathbb{K}$  défini par :

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que :

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA).$$

Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $(M)_{i,j}$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $M$ . On sait que pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,j} \text{ et } (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n B_{i,k}A_{k,j} \text{ (produit matriciel).}$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \sum_{i=1}^n (AB)_{i,i} \quad (\text{par définition de la trace d'une matrice}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{i,k}B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{k,i}A_{i,k} \\ &= \sum_{k=1}^n (BA)_{k,k} \\ &= \text{tr}(BA). \end{aligned}$$

Conclusion :  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Exercice 8.** Soit  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Soit  $A = (\omega^{(k-1)(\ell-1)})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ . Calculer  $A\bar{A}$ . En déduire que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

Pour tout  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on note  $(M)_{k,\ell}$  le coefficient d'indice  $(k, \ell)$  de la matrice  $M$ .

$$\begin{aligned} (A\bar{A})_{k,\ell} &= \sum_{j=1}^n (A)_{k,j}(\bar{A})_{j,\ell} \quad (\text{produit matriciel}) \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \overline{\omega^{(j-1)(\ell-1)}} \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \bar{\omega}^{(j-1)(\ell-1)} \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^{(k-1)(j-1)} \omega^{-(j-1)(\ell-1)} \quad (\text{ici } \bar{\omega} = \omega^{-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \omega^{(k-\ell)(j-1)} \\ &= \sum_{J=0}^{n-1} \left( \omega^{(k-\ell)} \right)^J \quad (J = j-1) \\ &= \begin{cases} n & \text{si } \omega^{(k-\ell)} = 1 \\ \frac{(\omega^{(k-\ell)})^n - 1}{\omega^{(k-\ell)} - 1} & \text{si } \omega^{(k-\ell)} \neq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} n & \text{si } k = \ell \\ \frac{(\omega^n)^{(k-\ell)} - 1}{\omega^{(k-\ell)} - 1} & \text{si } k \neq \ell \end{cases} \\ &= \begin{cases} n & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell \end{cases} \quad (\text{car } \omega^n = 1). \end{aligned}$$

Ainsi  $A\bar{A} = nI_n$ , d'où  $A \times \frac{1}{n}\bar{A} = I_n$ . On en déduit que  $A$  est inversible et

que  $A^{-1} = \frac{1}{n} \overline{A}$ .

*Remarque.* En montrant que  $AB = I_n$ , on montre que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = B$ .

**Exercice 9.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer les coefficients de  $A^n$  lorsque :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 2. A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{P}_n : \ll A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \gg$ .

$A^1 = A = \begin{pmatrix} 2^0 & 2^0 \\ 2^0 & 2^0 \end{pmatrix}$  donc  $\mathcal{P}_1$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ .

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \\ 2^{n-1} + 2^{n-1} & 2^{n-1} + 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \\ 2 \times 2^{n-1} & 2 \times 2^{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n & 2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{H}_n : \ll A^{2n} = I_3$  et  $A^{2n+1} = A \gg$ .  
 $\mathcal{H}_0$  est vraie car  $A^0 = I_3$  et  $A^1 = A$  par définition.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $\mathcal{H}_n$  vraie, c'est-à-dire  $A^{2n} = I_3$  et  $A^{2n+1} = A$ , et on montre  $\mathcal{H}_{n+1}$ , c'est-à-dire  $A^{2n+2} = I_3$  et  $A^{2n+3} = A$ .

$$\begin{aligned} A^{2n+2} &= A^{2n+1} \times A \quad (\text{par définition}) \\ &= A \times A \quad (\text{d'après } \mathcal{H}_n) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= I_3 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^{2n+3} &= A^{2n+2} \times A \\ &= I_3 \times A \\ &= A. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{H}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^{2n} = I_3$  et  $A^{2n+1} = A$ .

**Exercice 10.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$$

On note  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : \ll A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \gg$ .

$A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} a^0 & 0 \\ 0 & a^0 \end{pmatrix}$ , donc  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie et on montre  $\mathcal{P}_{n+1}$ , c'est-à-dire  $A^{n+1} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n b \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{d'après } \mathcal{P}_n \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} + 0 & a^n b + na^n b \\ 0 & 0 + a^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{n+1} & (1+n)a^n b \\ 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\ll A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix} \gg$ .

**Exercice 11.** Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$ , on note  $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ .

1. Soit  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ . Calculer  $A_\theta \times A_\varphi$ .
2. Soit  $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ . Calculer  $(A_\theta)^n$ .

1. Pour tout  $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A_\theta \times A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$ .

2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : \ll (A_\theta)^n = A_{n\theta} \gg$ .

$(A_\theta)^0 = I_2$  et  $A_0 = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = I_2$ , donc  $(A_\theta)^0 = A_{0 \times \theta}$  et  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie et on montre  $\mathcal{P}_{n+1}$ , c'est-à-dire  $(A_\theta)^{n+1} = A_{(n+1)\theta}$ .

$$\begin{aligned} (A_\theta)^{n+1} &= (A_\theta)^n \times A_\theta \\ &= A_{n\theta} \times A_\theta \quad (\text{d'après } \mathcal{P}_n) \\ &= A_{n\theta+\theta} \quad (\text{d'après Q1}) \\ &= A_{(n+1)\theta}, \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(A_\theta)^n = A_{n\theta}$ .

**Exercice 12.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. On pose  $N = A - I_3$ . Déterminer  $N^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

2. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  trois suites réelles définies par la donnée de  $u_0, v_0, w_0$  et vérifiant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2v_n + 3w_n \\ v_{n+1} &= v_n + 2w_n \\ w_{n+1} &= w_n \end{cases}.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer les expressions de  $u_n, v_n$  et  $w_n$  en fonction de  $n, u_0, v_0$  et  $w_0$ .

1.  $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $N^3 = 0_3$ . On en déduit que pour tout  $n \geq 3$ ,  $N^n = 0_3$ .

2.  $A = N + I$ . Comme  $NI = N = IN$ , on a, pour tout  $n \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} A^n &= (N + I)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k I^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k \\ &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 + 0_3 \quad (\text{si } n \geq 2) \\ &\text{car } N^k = 0_3 \quad \forall k \geq 3, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} A^n &= I + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 3n + 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On constate que cette égalité est encore vérifiée pour  $n = 0$  et pour  $n = 1$ .

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

3. On pose  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ .

On vérifie que  $X_{n+1} = AX_n$ .

En effet

$$\begin{aligned} AX_n &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_n + 2v_n + 3w_n \\ v_n + 2w_n \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} \\ &= X_{n+1}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = A^n X_0$  (démonstration par récurrence à rédiger).

D'où  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n^2 + n \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n = u_0 + 2nv_0 + (2n^2 + n)w_0 \\ v_n = v_0 + 2nw_0 \\ w_n = w_0 \end{cases}.$$

*Remarque.* La suite  $(w_n)$  est une suite constante et la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique de raison  $2w_0$ .

**Exercice 13.** Soit  $m \in \mathbb{R}$ . On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . Résoudre, lorsque c'est possible, le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

En déduire  $A^{-1}$ .

Exercice très calculatoire.

On a  $\det A = m$ .

Lorsque  $m \neq 0$ , le système considéré admet une unique solution :

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (1 - \frac{2}{m})a - 2(m + \frac{1}{m})b + (m + \frac{2}{m})c \\ 2b - c \\ -\frac{1}{m}a - \frac{1}{m}b + \frac{1}{m}c \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{2}{m} & -2(m + \frac{1}{m}) & m + \frac{2}{m} \\ 0 & 2 & -1 \\ -\frac{1}{m} & -\frac{1}{m} & \frac{1}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans ce cas ( $m \neq 0$ ),  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} m-2 & -2(m^2+1) & m^2+2 \\ 0 & 2m & -m \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque : Lorsque  $m = 0$ , il faut distinguer deux cas pour la résolution du système :

- Si  $c - b - a \neq 0$ , alors le système n'admet aucune solution.
- Si  $c - b - a = 0$ , alors le système admet une infinité de solution.

**Exercice 14.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$\begin{aligned} 1. A &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & 2. A &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \\ 3. A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & 4. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \\ 5. A &= \begin{pmatrix} i & -1 & 2i \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & 6. A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.  $\det A = 0$ , donc  $A$  n'est pas inversible.

2.  $\det A = 2$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -i/2 \\ -i/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

3.  $\det A = 1 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

4.  $\det A = 0$ , donc  $A$  n'est pas inversible.

5.  $\det A = 4 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & -1/2 \\ -1 & 3i/4 & i/2 \\ 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

6.  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & -16 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 15.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Le cas échéant, calculer leur inverse.

$$\begin{aligned} 1. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & 2. A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \\ 3. A &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} & 4. A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ 5. A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} & 6. A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ 7. A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.  $\det A = -2 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ .

2.  $\det A = 0$ , donc  $A$  n'est pas inversible.

3.  $\det A = 4 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .
4.  $\det A = 4 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .
5.  $\det A = 0$ , donc  $A$  n'est pas inversible.
6.  $\det A = 1 \neq 0$ , donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .
7.  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & -5 & 8 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 16.** 1. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^2 = 2I_n - A$ . Montrer que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$ .

2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer  $A^2$ . Déterminer  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $A^2 = aA + bI_3$ .

En déduire que  $A$  est inversible et calculer son inverse.

3. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^3 - A = 4I_n$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer une expression de  $A^{-1}$  en fonction de  $A$  et de  $I_n$ .

*Remarque.* En montrant que  $AB = I_n$ , on montre que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = B$ .

1.

$$\begin{aligned} A \times \frac{1}{2}(A + I_n) &= \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A \\ &= \frac{1}{2}(2I_n - A) + \frac{1}{2}A \\ &= I_n - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \\ &= I_n. \end{aligned}$$

2. On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_n)$ .

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} A^2 &= 3A - 2I_3 \\ \implies I_3 &= \frac{1}{2}(3A - A^2) \\ \implies I_3 &= A \times \frac{1}{2}(3I - A). \end{aligned}$$

On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$ .

3. On a

$$\begin{aligned} A^3 - A &= 4I_n \\ \implies I_n &= \frac{1}{4}(A^3 - A) \\ \implies I_n &= A \times \frac{1}{4}(A^2 - I). \end{aligned}$$

On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I)$ .

**Exercice 17.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que  $P$  est inversible et déterminer  $P^{-1}$ .
2. Calculer  $P^{-1}AP$ .
3. En déduire  $A^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1.  $\det P = 1 \neq 0$  donc  $P$  est inversible et  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
2.  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ . Dans la suite, on note  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .  
 $P^{-1}AP = D \iff A = PDP^{-1}$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : \ll A^n = PD^nP^{-1} \gg$ .  
 $A^0 = I_3$  et  $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = PP^{-1} = I_3$  donc  $A^0 = PD^0P^{-1}$  et  $\mathcal{P}_0$  est vraie.  
Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et on montre  $\mathcal{P}_{n+1}$ , c'est-à-dire  $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= (PD^nP^{-1}) \times A \quad (\text{d'après } \mathcal{P}_n) \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \quad (\text{d'après } Q2) \\ &= PD^nIDP^{-1} \quad (\text{car } P^{-1}P = I) \\ &= PD^nDP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$ .

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \text{ car } D$$

est diagonale, donc

$$\begin{aligned} A^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : Pour tout } n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n - 1 & 1 - 2^n & 2^n \end{pmatrix}.$$

**Exercice 18.** Écrire les systèmes suivants sous forme matricielle :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

**Exercice 19.** Déterminer l'expression, le rang, le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à la matrice :

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 2. B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$3. C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad 4. D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$$

1. On note  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A$ .

— Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x + 3y + 4z, 3x + 4y + 5z).$$

—  $\text{rg}(f) = 2$ ,

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{Im}(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

2. On note  $g$  l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $B$ .

— Pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,

$$g(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y + 4z, x + 3y + 9z),$$

—  $\text{rg}(g) = 3$ ,

$$\text{Ker}(g) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Im}(g) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} \right).$$

3. On note  $h$  l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $C$ .

— Pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ ,

$$h(x, y, z, t) = (x + 2y + 3z + 2t, 2x + 3y + 4z + 2t, 3x + 4y + 5z + 2t),$$

—  $\text{rg}(h) = 2$ ,

—

$$\text{Ker}(h) = \left\{ \begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \\ -y/2 - z \end{pmatrix} \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{Im}(h) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

4. On note  $\ell$  l'application linéaire canoniquement associée à la matrice  $D$ .

— Pour tout  $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ ,

$$\ell(x, y, z, t) = (x + 2y + z + 2t, -2x - 3y - 5t, 4x + 9y + 6z + 7t, x - y - 5z + 5t).$$

—  $\text{rg}(\ell) = 2$ ,

$$\text{Ker}(\ell) = \left\{ \begin{pmatrix} 3z - 4t \\ -2z + t \\ z \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\text{Im}(\ell) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right).$$

**Exercice 20.** Déterminer le rang des applications linéaires suivantes :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y - z, x, -z)$$

et

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y) \mapsto (x + y, 2x - y, y)$$

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{rg}(f) = 3.$$

$$\text{Mat}_{\text{can}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \text{rg}(g) = 2.$$