

Feuille d'exercices n°16

Polynômes

Exercice 1. Calculer $(X + 1)^5 - (X - 1)^5$.

Exercice 2. Soient

$$P(X) = X^2 - 3X + 2, \quad Q(X) = 2 \quad \text{et} \quad R(X) = 2X + 1.$$

- Déterminer $\tilde{P}(2)$, $\tilde{P}(-2)$ et $\tilde{Q}(-2)$.
- Déterminer $P \circ R$, $R \circ P$, $P \circ P$ et $Q \circ P$.
Déterminer le polynôme dérivé de chacun de ces polynômes.
- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\tilde{P}(A)$ et $\tilde{Q}(A)$.
Factoriser le polynôme P . En déduire une égalité matricielle.

Exercice 3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

- Montrer que si les polynômes $P + Q$ et $P - Q$ sont constants, alors les polynômes P et Q sont constants.
- Montrer que si le polynôme $P^2 - Q^2$ est constant non nul, alors les polynômes P et Q sont constants.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

Exercice 5. Déterminer le degré de $(X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}$ en fonction de a et de b .

Exercice 6. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

- $A(X) = X^7 + 2X^3 - X^2 + 1$ et $B(X) = X^2 + X + 2$.
- $A(X) = 2X^8$ et $B(X) = X^3 - 2X^2 + 1$.
- $A(X) = (1 + i)X^4 - 5X^2 + (2i - 1)X + 7$ et $B(X) = X^2 - iX + (i - 1)$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

- $X + 1$,
- $X^2 - 3X + 2$.
- $X^2 + 2X + 1$.

Exercice 8. Soit $P(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2$.

- Montrer que 2 est une racine simple de P .
- Montrer que -1 est une racine triple de P .
- En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

Exercice 9. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $P(X) = X^5 + X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + 5X - 2$ et $Q(X) = X^3 - 2X + 1$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer α et β pour que Q divise P .

Exercice 10. 1. Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$? de $\mathbb{C}[X]$?

2. Factoriser les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$:

(a) $P(X) = 6X^2 - X - 1$,

(b) $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$,

(c) $R(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.

3. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 11. Montrer que $X - 1$ divise $X^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 12. Montrer la proposition du cours suivante :

$$P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \iff a \text{ est une racine de multiplicité } \geq 2.$$

Exercice 13. 1. Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer l'ensemble des polynômes P unitaires qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$.

2. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 14. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

1. Montrer que $\tilde{R}(i) = \tilde{P}(i)$. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $\tilde{P}(i) = 0$.

2. Pour quels entiers naturels n le polynôme $X^n + 1$ est-il un multiple de $X^2 + 1$?

Exercice 15. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k.$$

1. Calculer $P - P'$.

2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 16. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

1. On suppose que 1 est racine de P . Montrer que $(X - 1)^2$ divise P et déterminer le quotient de P par $(X - 1)^2$.

2. On suppose que -1 est racine de P . Montrer que $(X + 1)^2$ divise P et déterminer le quotient de P par $(X + 1)^2$.

Exercice 17. 1. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On note α, β et γ les racines complexes de P . Montrer que l'on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases} .$$

2. *Application.* Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} .$$

Exercice 18. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \leq n$ et

$$XP(X - 1) = (X - 2)P(X).$$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P .

2. On suppose que P admet une racine complexe a non entière.

(a) Montrer que $a - 1$ et $a + 1$ sont aussi racines.

(b) Montrer que P admet une infinité de racines.

(c) En déduire que $P = 0$.

Exercice 19. Factoriser $P(X) = X^3 + (1 + i)X^2 + (i - 1)X - i$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine imaginaire pure.

Exercice 20. On note $\alpha = \cos(2\pi/5)$ et $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$.

1. Montrer que α est une racine de P . En déduire une expression pour α .

2. Montrer que l'autre racine de P est $\cos(4\pi/5)$.