

Feuille d'exercices n°16 – Correction

Polynômes

Exercice 1. Calculer $(X + 1)^5 - (X - 1)^5$.

$$\begin{aligned}(X + 1)^5 - (X - 1)^5 &= (X^5 + 5X^4 + 10X^3 + 10X^2 + 5X + 1) \\ &\quad - (X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X - 1) \\ &= 10X^4 + 20X^2 + 2.\end{aligned}$$

Exercice 2. Soient

$$P(X) = X^2 - 3X + 2, \quad Q(X) = 2 \quad \text{et} \quad R(X) = 2X + 1.$$

1. Déterminer $\tilde{P}(2)$, $\tilde{P}(-2)$ et $\tilde{Q}(-2)$.
2. Déterminer $P \circ R$, $R \circ P$, $P \circ P$ et $Q \circ P$.
Déterminer le polynôme dérivé de chacun de ces polynômes.
3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\tilde{P}(A)$ et $\tilde{Q}(A)$.
Factoriser le polynôme P . En déduire une égalité matricielle.

1. $P(2) = 0$ (donc 2 est une racine de P), $P(-2) = 12$ et $Q(-2) = 2$.

2. On a

$$\begin{aligned}P \circ R &= R^2 - 3R + 2 \\ &= (2X + 1)^2 - 3(2X + 1) + 2 \\ &= 4X^2 - 2X,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R \circ P &= 2P + 1 \\ &= 2(X^2 - 3X + 2) + 1 \\ &= 2X^2 - 6X + 5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P \circ P &= P^2 - 3P + 2 \\ &= X^4 - 6X^3 + 10X^2 - 3X\end{aligned}$$

et

$$Q \circ P = 2.$$

Polynômes dérivés : $(P \circ R)' = 8X - 2$, $(R \circ P)' = 4X - 6$,
 $(P \circ P)' = 4X^3 - 18X^2 + 20X - 3$ et $(Q \circ P)' = 0$.

3.

$$\begin{aligned}P(A) &= A^2 - 3A + 2I \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$Q(A) = 2I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

On a $P(X) = (X - 1)(X - 2)$. En particulier
 $(A - I)(A - 2I) = A^2 - 3A + 2I$.

Exercice 3. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Montrer que si les polynômes $P + Q$ et $P - Q$ sont constants, alors les polynômes P et Q sont constants.
2. Montrer que si le polynôme $P^2 - Q^2$ est constant non nul, alors les polynômes P et Q sont constants.

1. Supposons que les polynômes $P + Q$ et $P - Q$ soient constants. Il existe alors α et β des scalaires tels que $P + Q = \alpha$ et $P - Q = \beta$. Donc $P = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$ et $Q = \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$. Les polynômes P et Q sont donc constants.

2. Supposons que le polynôme $P^2 - Q^2$ soit constant non nul.

Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P^2 - Q^2 = \lambda$.

Donc $(P - Q)(P + Q) = \lambda$ (en particulier $P - Q \neq 0$ et $P + Q \neq 0$),

donc $\deg((P - Q)(P + Q)) = 0$,

donc $\underbrace{\deg(P - Q)}_{\geq 0} + \underbrace{\deg(P + Q)}_{\geq 0} = 0$,

d'où $\deg(P - Q) = 0$ et $\deg(P + Q) = 0$.

Les polynômes $P - Q$ et $P + Q$ étant constants, on conclut en utilisant le résultat de la question précédente que les polynômes P et Q sont constants.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.

On note (E) l'équation $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Le polynôme nul est solution de (E) car $0 = (X^2 + 1) \times 0$.

Le polynôme nul est le seul polynôme constant solution : en effet si $\lambda = (X^2 + 1)\lambda$, alors par identification des coefficients $\lambda = 0$.

Soit P un polynôme non constant solution de (E).

Alors : $\deg(P(X^2)) = \deg((X^2 + 1)P(X))$

$$\implies \deg P \times \deg(X^2) = \deg(X^2 + 1) + \deg P$$

$$\implies 2 \deg P = 2 + \deg P$$

$$\implies \deg P = 2.$$

Ainsi si P est solution de (E), alors $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Soit $P(X)$ un polynôme de la forme $aX^2 + bX + c$.

P est une solution de (E)

$$\iff P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$$

$$\iff aX^4 + bX^2 + c = (X^2 + 1)(aX^2 + bX + c)$$

$$\iff aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a + c)X^2 + bX + c$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a + c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases} \quad (\text{par unicité des coefficients d'un polynôme})$$

$$\iff \begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ c = -a \end{cases}$$

$$\iff P(X) = aX^2 - a.$$

Conclusion : L'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$ sont les polynômes $P(X) = aX^2 - a$, avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer le degré de $(X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}$ en fonction de a et de b .

On peut montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X^2 + X + 1)^n = X^{2n} + nX^{2n-1} + \frac{n(n+1)}{2}X^{2n-2} + P_n,$$

où P_n est un polynôme vérifiant $\deg(P_n) < 2n - 2$.

Ainsi

$$(X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1} = (1-a)X^{2n} + (n-b)X^{2n-1} + \frac{n(n+1)}{2}X^{2n-2} + P_n.$$

Conclusion :

$$\begin{cases} \deg((X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}) = 2n & \text{si } a \neq 1, \\ \deg((X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}) = 2n - 1 & \text{si } a = 1 \text{ et } b \neq n, \\ \deg((X^2 + X + 1)^n - aX^{2n} - bX^{2n-1}) = 2n - 2 & \text{si } a = 1 \text{ et } b = n. \end{cases}$$

Exercice 6. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B :

1. $A(X) = X^7 + 2X^3 - X^2 + 1$ et $B(X) = X^2 + X + 2$.
2. $A(X) = 2X^8$ et $B(X) = X^3 - 2X^2 + 1$.
3. $A(X) = (1 + i)X^4 - 5X^2 + (2i - 1)X + 7$ et $B(X) = X^2 - iX + (i - 1)$.

Division euclidienne de A par B : Il existe Q et R uniques tels que

$$A = BQ + R \text{ et } \deg R < \deg B.$$

Q est appelé le quotient (et R le reste) de la division euclidienne de A par B .

1. $Q(X) = X^5 - X^4 - X^3 + 3X^2 + X - 8$ et $R(X) = 6X + 17$.
2. $Q(X) = 2X^5 + 4X^4 + 8X^3 + 14X^2 + 24X + 40$ et $R(X) = 66X^2 - 24X - 40$.
3. $Q(X) = (1 + i)X^2 + (i - 1)X - 4 - i$ et $R(X) = 2 + 3i$.

Exercice 7. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par :

1. $X + 1$,
2. $X^2 - 3X + 2$.

1. Il existe $Q(X)$ et $R(X)$ uniques tels que

$$X^n = (X + 1)Q(X) + R(X) \text{ et } \deg R < 1.$$

Donc $R(X) = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc

$$X^n = (X + 1)Q(X) + \lambda$$

En particulier

$$(-1)^n = (-1 + 1)Q(1) + \lambda,$$

c'est-à-dire $\lambda = (-1)^n$. Donc $R(X) = (-1)^n$.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de X^n par $X + 1$ est $(-1)^n$.

2. Il existe $Q(X)$ et $R(X)$ uniques tels que

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X) \text{ et } \deg R < 2.$$

Donc $R(X) = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. On a donc

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + aX + b.$$

Pour déterminer a et b , nous évaluons cette égalité en 1 et en 2 (il s'agit des racines du polynôme $X^2 - 3X + 2$). On obtient alors

$$\begin{cases} 1 = 0 \times Q(1) + a + b \\ 2^n = 0 \times Q(2) + 2a + b \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 2^n \end{cases},$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} a = 2^n - 1 \\ b = 2 - 2^n \end{cases}.$$

Donc $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

Conclusion : Le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$ est $R(X) = (2^n - 1)X + 2 - 2^n$.

Exercice 8. Soit $P(X) = X^4 + X^3 - 3X^2 - 5X - 2$.

1. Montrer que 2 est une racine simple de P .
2. Montrer que -1 est une racine triple de P .
3. En déduire la décomposition de P en produit de facteurs irréductibles.

- 2 est racine simple de $P \iff P(2) = 0$ et $P'(2) \neq 0$ (à vérifier).
- 1 est racine triple de $P \iff P(-1) = P'(-1) = P''(-1) = 0$ et $P^{(3)}(-1) \neq 0$ (à vérifier).
- P étant un polynôme de degré 4, on a

$$P(X) = \underbrace{1}_{\text{coefficient dominant}} \times (X - 2) \times (X - (-1))^3,$$

c'est-à-dire $P(X) = (X - 2)(X + 1)^3$.

Exercice 9. Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $P(X) = X^5 + X^4 + \alpha X^3 + \beta X^2 + 5X - 2$ et $Q(X) = X^3 - 2X + 1$ deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

Déterminer α et β pour que Q divise P .

On note R le reste de la division euclidienne de P par Q .

Q divise P si et seulement si R est nul.

On détermine explicitement $R(X)$ en posant cette division euclidienne. On obtient

$$R(X) = (\beta + 1)X^2 + (2\alpha + 8)X - \alpha - 4.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} Q(X) \text{ divise } P(X) &\iff R(X) = 0 \\ &\iff (\beta + 1)X^2 + (2\alpha + 8)X - \alpha - 4 = 0 \\ &\iff \begin{cases} \beta + 1 = 0 \\ 2\alpha + 8 = 0 \\ -\alpha - 4 = 0 \end{cases} \\ &\iff \beta = -1 \text{ et } \alpha = -4. \end{aligned}$$

Conclusion : Q divise P si et seulement si $\beta = -1$ et $\alpha = -4$.

- Exercice 10.**
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$? de $\mathbb{C}[X]$?
 - Factoriser les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles et unitaires de $\mathbb{R}[X]$:
 - $P(X) = 6X^2 - X - 1$,
 - $Q(X) = X^3 - X^2 + X - 1$,
 - $R(X) = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$.
 - Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

1. (Cours)

2. (a) Les racines de P sont $-\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$. Donc $6X^2 - X - 1 = 6(X + \frac{1}{3})(X - \frac{1}{2})$.

2. (b) 1 est une racine évidente de Q . Donc $X - 1$ divise Q . On montre que $Q(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$ irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2. (c) -1 est une racine évidente de R . Donc $X + 1$ divise R . On montre que

$$\begin{aligned} R(X) &= (X + 1)(X^4 + 2X^2 + 1) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)^2 \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + 1), \end{aligned}$$

irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3. (a) Dans $\mathbb{C}[X]$, $P(X) = (X + \frac{1}{3})(X - \frac{1}{2})$.

3. (b) Dans $\mathbb{C}[X]$, $Q(X) = (X + 1)(X - i)(X + i)$.

3. (c) Dans $\mathbb{C}[X]$, $R(X) = (X + 1)(X - i)^2(X + i)^2$.

Exercice 11. Montrer que $X - 1$ divise $X^n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

Proposition 10 : $X - 1$ divise $X^n - 1$ si et seulement si 1 est racine de $X^n - 1$.

Or $1^n - 1 = 0$, donc 1 est racine de $X^n - 1$ et $X - 1$ divise $X^n - 1$.

Exercice 12. Montrer la proposition du cours suivante :

$$P(a) = 0 \text{ et } P'(a) = 0 \iff a \text{ est une racine de multiplicité } \geq 2.$$

Remarque : Dans la démonstration qui suit, on ne fait pas appel à la formule de Taylor (qui a été énoncée en cours sans être démontrée).

\Rightarrow On suppose que $P(a) = P'(a) = 0$. On sait qu'il existe Q et R uniques tels que

$$P(X) = (X - a)^2 Q(X) + R(X) \text{ et } \deg R < 2.$$

On sait donc que

$$(*) \quad P(X) = (X - a)^2 Q(X) + \alpha X + \beta \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

En dérivant (*), on obtient

$$(**) \quad P'(X) = 2(X - a)Q(X) + (X - a)^2 Q'(X) + \alpha.$$

En évaluant (**) en a , on trouve $P'(a) = \alpha$, donc $\alpha = 0$. On en déduit donc que $P(X) = (X - a)^2 Q(X) + \beta$. En évaluant cette dernière égalité en a , on obtient $P(a) = \beta$, c'est-à-dire $\beta = 0$. On a donc montré que $P(X) = (X - a)^2 Q(X)$ et que a est une racine de P de multiplicité ≥ 2 .

\Leftarrow On suppose que a est une racine de multiplicité ≥ 2 . Il existe Q un polynôme tel que $P(X) = (X - a)^2 Q(X)$. On a donc

$$\begin{aligned} P'(X) &= [(X - a)^2 Q(X)]' \\ &= 2(X - a)Q'(X) + (X - a)^2 Q''(X). \end{aligned}$$

D'où $P(a) = 0 \times Q(a) = 0$ et $P'(a) = 2 \times 0 \times Q'(a) + 0 \times Q''(a) = 0$. Donc $P(a) = P'(a) = 0$.

Exercice 13. 1. Dans $\mathbb{R}[X]$, déterminer l'ensemble des polynômes P unitaires qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$.
2. Même question dans $\mathbb{C}[X]$.

1. On a $X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$ (décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$). Il existe trois polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$: $(X^2 + 1)^0$, $(X^2 + 1)^1$ et $(X^2 + 1)^2$, c'est-à-dire 1 , $X^2 + 1$ et $(X^2 + 1)^2$.

2. On a $X^4 + 2X^2 + 1 = (X + i)^2(X - i)^2$ (décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$). Il existe 9 polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$ qui divisent $X^4 + 2X^2 + 1$: ce sont les polynômes $(X + i)^k(X - i)^\ell$ où $k, \ell \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$,

c'est-à-dire $1, X + i, X - i, (X + i)^2, (X - i)^2, (X + i)(X - i), (X + i)^2(X - i), (X + i)(X - i)^2$ et $(X - i)^2(X + i)^2$.

Exercice 14. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$.

1. Montrer que $\tilde{R}(i) = \tilde{P}(i)$. En déduire que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $\tilde{P}(i) = 0$.
2. Pour quels entiers naturels n le polynôme $X^n + 1$ est-il un multiple de $X^2 + 1$?

1. On note $Q(X)$ le quotient de la division euclidienne de P par $X^2 + 1$. On sait que

$$P(X) = (X^2 + 1)Q(X) + R(X) \quad (*)$$

et que $\deg R < 2$.

En évaluant (*) en i , on obtient

$$P(i) = \underbrace{(i^2 + 1)}_{=0} Q(i) + R(i)$$

donc $P(i) = R(i)$.

Remarque utile : Comme $\deg R < 2$, on sait que $R(X) = aX + b$ avec a, b des réels.

Montrons que $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$.

\Rightarrow Le sens direct est immédiat. Supposons que $X^2 + 1$ divise P , alors $R = 0$. En particulier $R(i) = 0$. Donc $P(i) = 0$.

\Leftarrow Supposons à présent que $P(i) = 0$. Alors $R(i) = 0$, c'est-à-dire $a + ib = 0$, d'où $a = b = 0$ (un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles). On en déduit que $R(X) = 0$ (car $R(X) = aX + b$) et que $P(X) = (X^2 + 1)Q(X)$. On a donc montré que $X^2 + 1$ divise P .

Conclusion : $X^2 + 1$ divise P si et seulement si $P(i) = 0$.

2.

$$\begin{aligned} X^n + 1 \text{ est un multiple de } X^2 + 1 &\iff X^2 + 1 \text{ divise } X^n + 1 \\ &\iff i^n + 1 = 0 \text{ (d'après Q1)} \\ &\iff i^n = -1 \\ &\iff n = 2 + 4k \text{ avec } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Conclusion : $X^n + 1$ est un multiple de $X^2 + 1$ si et seulement si $n = 2 + 4k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k.$$

1. Calculer $P - P'$.
2. Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

1.

$$\begin{aligned} P - P' &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k - \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X^k - \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{\ell!} X^\ell \\ &= \frac{1}{n!} X^n. \end{aligned}$$

Conclusion : $P - P' = \frac{1}{n!} X^n$.

2. Pour montrer que toutes les racines de P sont simples, on procède par l'absurde. On suppose donc qu'il existe a une racine de P de multiplicité ≥ 2 . Alors $P(a) = 0$ et $P'(a) = 0$. En utilisant le résultat de la question

précédente, on a $\frac{1}{n!} a^n = 0$. D'où $a = 0$. La contradiction vient du fait que $P(0) = 1$ (0 n'est donc pas une racine de P). On en déduit que toutes les racines de P sont simples.

Exercice 16. Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + aX + 1$.

1. On suppose que 1 est racine de P . Montrer que $(X - 1)^2$ divise P et déterminer le quotient de P par $(X - 1)^2$.
2. On suppose que -1 est racine de P . Montrer que $(X + 1)^2$ divise P et déterminer le quotient de P par $(X + 1)^2$.

1. On suppose que 1 est racine de P . Alors $P(1) = 0$, c'est-à-dire $2a + b + 2 = 0$.

Pour montrer que $(X - 1)^2$ divise P si et seulement si 1 est une racine de multiplicité ≥ 2 .

Il suffit donc de s'assurer que $P'(1) = 0$.

On a $P'(1) = 4a + 2b + 4 = 2(2a + b + 2) = 0$.

Conclusion : $(X - 1)^2$ divise P .

On note Q le quotient de la division de P par $X^2 - 1$.

Conclusion : $Q(X) = X^2 + (a + 2)X + 1$.

2. On suppose que -1 est racine de P . Alors $P(-1) = 0$, c'est-à-dire $-2a + b + 2 = 0$.

Montrons que $P'(-1) = 0$: $P'(-1) = -4 + 3a - 2b + a = -2(-2a + b + 2) = 0$.

Conclusion : $(X + 1)^2$ divise P .

On montre que lorsque -1 est racine de P , alors

$$P(X) = (X + 1)^2(X^2 + (a - 2)X - 1).$$

Conclusion : Le quotient de P par $(X + 1)^2$ est $X^2 + (a - 2)X - 1$.

Exercice 17. 1. Soit $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On note α, β et γ les racines complexes de P . Montrer que l'on a

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases}.$$

2. *Application.* Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xy + xz + yz = 0 \\ xyz = 1 \end{cases} .$$

1. α, β et γ étant les racines complexes de P , on a $P(X) = 1(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$. En développant cette expression, on obtient

$$X^3 + aX^2 + bX + c = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma.$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = -a \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b \\ \alpha\beta\gamma = -c \end{cases} .$$

2. D'après la question précédente, les solutions de ce système sont les racines du polynôme

$$P(X) = X^3 - 0X^2 + 0X - 1,$$

c'est-à-dire $P(X) = X^3 - 1$. Il s'agit des racines cubiques de l'unité (cf cours sur les complexes) : $1, \omega$ et ω^2 où $\omega = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Ce système admet 6 triplets solutions :

$$\mathcal{S} = \{(1, \omega, \omega^2), (1, \omega^2, \omega), (\omega, 1, \omega^2), (\omega, \omega^2, 1), (\omega^2, 1, \omega), (\omega^2, \omega, 1)\} .$$

Exercice 18. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \leq n$ et

$$XP(X - 1) = (X - 2)P(X).$$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P .
2. On suppose que P admet une racine complexe a non entière.

- (a) Montrer que $a - 1$ et $a + 1$ sont aussi racines.
- (b) Montrer que P admet une infinité de racines.
- (c) Conclure.

1.

$$XP(X - 1) = (X - 2)P(X) \quad (\star)$$

En évaluant (\star) en 0, on a $0 \times P(-1) = -2P(0)$, donc $P(0) = 0$ et 0 est racine de P .

Puis, en évaluant (\star) en 1, on trouve $1 \times P(0) = -P(1)$, donc $P(1) = 0$ et 1 est une racine de P .

Conclusion : 0 et 1 sont des racines de P .

2. On suppose que P admet une racine complexe a non entière. Alors $P(a) = 0$.

(a) En évaluant (\star) en a , on obtient $aP(a - 1) = (a - 2)P(a)$. Donc $aP(a - 1) = 0$, or $a \neq 0$ (car $a \notin \mathbb{Z}$), d'où $P(a - 1) = 0$. On a montré que $a - 1$ est une racine de P .

Évaluons à présent (\star) en $a + 1$. On obtient $(a + 1)P(a) = (a - 1)P(a + 1)$, donc $(a - 1)P(a + 1) = 0$ et $P(a + 1) = 0$ car $a - 1 \neq 0$ ($a - 1 \notin \mathbb{Z}$). On a montré que $a + 1$ est une racine de P .

Conclusion : $a - 1$ et $a + 1$ sont des racines de P .

(b) On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a - n$ et $a + n$ sont des racines de P . P admet donc une infinité de racines.

(c) Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines. P admettant une infinité de racines, $P = 0$.

Exercice 19. Factoriser $P(X) = X^3 + (1 + \mathbf{i})X^2 + (\mathbf{i} - 1)X - \mathbf{i}$ dans $\mathbb{C}[X]$ sachant qu'il admet une racine imaginaire pure.

$$P(X) = (X + \mathbf{i}) \left(X + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(X + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

Exercice 20. On note $\alpha = \cos(2\pi/5)$ et $P(X) = 4X^2 + 2X - 1$.

1. Montrer que α est une racine de P . En déduire une expression pour α .

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$. On a

$$\begin{aligned} P(\alpha) &= 4 \left(\frac{\omega + \omega^{-1}}{2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\omega + \omega^{-1}}{2} \right) - 1 \\ &= \omega^2 + \omega^{-2} + \omega + \omega^{-1} + 1 \\ &= \omega^2 + \omega^3 + \omega + \omega^4 + 1 && \text{car } \omega^5 = 1 \\ &= \frac{\omega^5 - 1}{\omega - 1} && \text{car } \omega \neq 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que α est une racine de P . Donc $\alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$. Or

$$\alpha \geq 0, \text{ donc } \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

2. Montrer que l'autre racine de P est $\cos(4\pi/5)$.

On a

$$\begin{aligned} \cos(4\pi/5) &= \cos(2 \times 2\pi/5) \\ &= 2\alpha^2 - 1 \\ &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}. \end{aligned}$$