Feuille d'exercices n°17
Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

1. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=1\right\}$.
2. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}$.
3. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy=0\right\}$.
4. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x=y\right\}$.
5. $\{(x,2x,3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
6. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y=0\right\}$.
7. $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\right\}$.
8. $E_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0)=P(2)\}$.
9. $E_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P'(0)=2\}$.
10. Pour $A \in \mathbb{R}[X]$ non nul fixé, $E_3 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.
11. E_4, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = 0$, où a est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
12. E_5, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = x$, où a est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
2. l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T = M\right\}$ des matrices symétriques de taille $n \times n$.
5. l'ensemble des fonctions paires (impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé).

Exercice 3. Soient $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\right\}$ et

$$G = \{(a-b, a+b, a-3b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

Exercice 4. Soit $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 5. Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, déterminer une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. (v_1, v_2) avec $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (1,2,2)$.
2. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1,0,0)$, $v_2 = (1,1,0)$ et $v_3 = (1,1,1)$.
3. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,1,-1)$ et $v_3 = (1,-1,-2)$.
4. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1,-1,1)$, $v_2 = (2,-1,3)$ et $v_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 6.

1. Trouver deux vecteurs engendrant le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$.
2. Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1,0,1)$ et $v_2 = (1,-1,-1)$.

Exercice 7. Trouver la dimension des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants et en donner une base.

1. $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$, $p, q \in \mathbb{N}$.
4. l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$.
5. l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille n, $n \in \mathbb{N}$.
6. l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de taille n, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soient $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que les vecteurs v_1, v_2 et v_3 forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $v = (1, 1, 1)$.

Exercice 9.
1. Les familles suivantes de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont-elles libres ?
   (a) (P_1, P_2, P_3) avec $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + 2X$ et $P_3 = 1 + X + X^4$.
   (b) (P_1, P_2, P_3) avec $P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = 1 - X + X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + X^2$.
2. Soient $P_1 = 1, \quad P_2 = 1 + X \quad$ et $\quad P_3 = 1 + X + X^2$.
   (a) Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $P = 2 + 3X - X^2$ dans cette base.

Exercice 10. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'ensemble $\mathscr{H}$ des éléments $X \in \mathbb{R}^3$ tels que l'on ait $A.X = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Exercice 11. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (1, -2, 1, 2),\ u_2 = (1, -3, 1, 2),\ u_3 = (2, -4, 3, 4) \text{ et } u_4 = (1, -1, 2, 3).$$

1. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Soient a, b, c, d des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur (a, b, c, d) dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4).
3. Calculer les coordonnées, dans la base (u_1, u_2, u_3, u_4), de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 12. Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :

1. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\right\}$.
2. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 1\right\}$.
3. $\left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\right\}$.
4. $\left\{(3a + b, a - b, a + 5b, 2a + b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

Exercice 13. Vérifier que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et déterminer une base de ces espaces :

1. $\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x + y = y + z = 0\right\}$.
2. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(X) = P(1 - X)\}$.
3. $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles que } u_n + u_{n+1} = 0\right\}$.

Exercice 14. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$u = (2, 3, -1),\ v = (1, -1, -2),\ x = (3, 7, 0) \text{ et } y = (5, 0, -7).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(x, y)$.

1. Montrer que l'on a $F = G$.
2. Trouver une équation de F.

Exercice 15. Soit a un nombre réel. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(a+2, a, a-2)$, $(1, a, -1)$ et $(a, -a, 1)$?

Exercice 16. On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$:

$$u_1 = (-3, 1, 0, 2),\ u_2 = (-5, 2, 1, 2),\ u_3 = (1, 1, 4, -6) \text{ et } u_4 = (-1, 0, -1, 2).$$

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.
2. Montrer que les vecteurs u_1 et u_2 sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 17. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = (1,0,1,0),\ v = (0,1,-1,0),\ w = (1,1,1,1),\ x = (0,0,1,0) \text{ et } y = (1,1,0,-1).$$

Soient $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ et $G = \mathrm{Vect}(x,y)$.
Quelles sont les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$?

Exercice 18. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \mathrm{Vect}(u,v)$ où $u = (1,1,0)$ et $v = (2,1,1)$,
2. $F = \mathrm{Vect}(u,v,w)$ où $u = (-1,1,0), v = (2,0,1)$ et $w = (1,1,1)$,
3. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

Exercice 19. On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants :

$$v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,0,1,0), v_3 = (0,1,0,0), v_4 = (0,0,0,1) \text{ et } v_5 = (0,1,0,1).$$

Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_3)$?
2. $\mathrm{Vect}(v_1,v_2)$ et $\mathrm{Vect}(v_4,v_5)$?
3. $\mathrm{Vect}(v_1,v_3,v_4)$ et $\mathrm{Vect}(v_2,v_5)$?
4. $\mathrm{Vect}(v_1,v_4)$ et $\mathrm{Vect}(v_3,v_5)$?