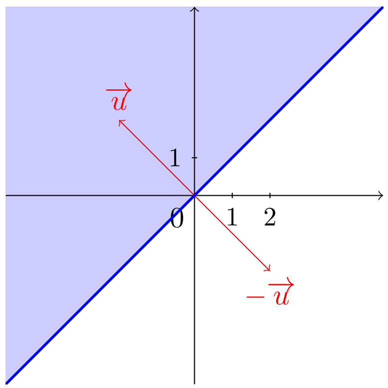
# Feuille d'exercices n°17 – Correction
# Espaces vectoriels

**Exercice 1.** Les ensembles suivants sont-ils des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels ?

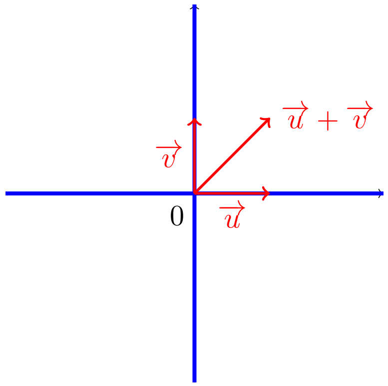
1. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$.
2. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq y\}$.
3. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$.
4. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x=y\}$.
5. $\{(x,2x,3x) \mid x\in\mathbb{R}\}$.
6. $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=0\}$.
7. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$.
8. $E_1=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P(0)=P(2)\}$.
9. $E_2=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid P'(0)=2\}$.
10. Pour $A\in\mathbb{R}[X]$ non nul fixé, $E_3=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid A \text{ divise } P\}$.
11. $E_4$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+a(x)y=0$, où $a$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
12. $E_5$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'+a(x)y=x$, où $a$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

**Correction**

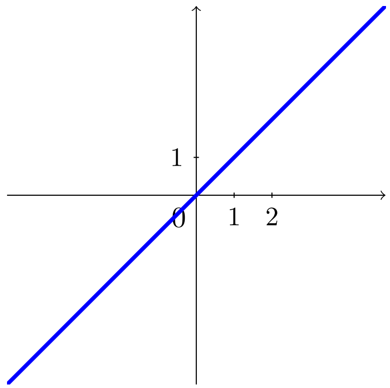
1. On note $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x+y=1\}$. $F\subset\mathbb{R}^2$ et $0_{\mathbb{R}^2}\notin F$ (car $0+0\neq 1$). $F$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
2. On note $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\leq y\}$. $\overrightarrow{u}(-2,2)\in F$, mais $-\overrightarrow{u}(2,-2)\notin F$. Donc $F$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.




3. On note $F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=0\}$. $\overrightarrow{u}(1,0)$ et $\overrightarrow{v}(0,1)$ appartiennent à $F$, mais $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\notin F$. Donc $F$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.



4. On note $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x = y\right\}$.




   - $F \subset \mathbb{R}^2$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
   - $(0,0) \in F$.
   - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{u}'(x',y')$ des vecteurs de $F$.
     $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' = (\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y') \in F$ car $x = y$ et $x' = y'$.
     Ainsi pour tout $\alpha, \beta$ réels et pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}' \in F$,
     $$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' \in F.$$

   Conclusion : $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. D'où $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

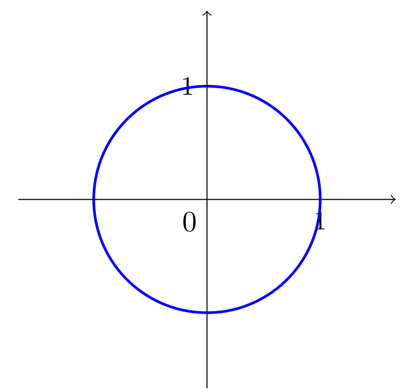
5. On note $F = \{(x, 2x, 3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
   - $F \subset \mathbb{R}^3$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
   - $(0,0,0) \in F$.
   - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $\overrightarrow{u}(x, 2x, 3x)$ et $\overrightarrow{u}'(x', 2x', 3x')$ des vecteurs de $F$.
     $$\begin{aligned}\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' &= (\alpha x + \beta x', 2\alpha x + 2\beta x', 3\alpha x + 3\beta x') \\ &= \underbrace{\big(\alpha x + \beta x', 2(\alpha x + \beta x'), 3(\alpha x + \beta x')\big)}_{\in F}\end{aligned}$$
     Ainsi pour tout $\alpha, \beta$ réels et pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}' \in F$, $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' \in F$.

   Conclusion : $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'où $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6. On note $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ y = 0\right\}$.
   - $F \subset \mathbb{R}^3$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
   - $(0,0,0) \in F$.
   - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $\overrightarrow{u}(x, 0, z)$ et $\overrightarrow{u}'(x', 0, z')$ des vecteurs de $F$.
     $$\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' = \underbrace{(\alpha x + \beta x', 0, \alpha z + \beta z')}_{\in F}$$
     Ainsi pour tout $\alpha, \beta$ réels et pour tout $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u}' \in F$, $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' \in F$.

   Conclusion : $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. D'où $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

7. On note $F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = 1\right\}$.
   $(0,0) \notin F$ donc $F$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.




8. 
   - $E_1 \subset \mathbb{R}[X]$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
   - Le polynôme nul appartient à $E_1$ ($P \leftarrow 0$).
   - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $P, Q$ deux polynômes de $E_1$. On a
     $$\begin{aligned}(\alpha P + \beta Q)(0) &= \alpha P(0) + \beta Q(0) \\ &= \alpha P(2) + \beta Q(2) \text{ (car } P, Q \in E_1) \\ &= (\alpha P + \beta Q)(2).\end{aligned}$$
     Donc $\alpha P + \beta Q \in E_1$.

Conclusion : $E_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc $E_1$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

9. $E_2$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car $0 \notin E_2$ (si $P = 0$, alors $P'(0) = 0 \neq 2$).
10. 
    - $E_3 \subset \mathbb{R}[X]$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
    - Le polynôme nul appartient à $E_3$ car $A$ divise 0 ($0 = A \times 0$).
    - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $P, Q$ deux polynômes de $E_3$. Alors $P = A \times P_1$ et $Q = A \times Q_1$On a

    $$\begin{aligned} \alpha P + \beta Q &= \alpha A \times P_1 + \beta A \times Q_1 \\ &= A \times (\alpha P_1 + \beta Q_1) \end{aligned}$$

    Donc $\alpha P + \beta Q \in E_3$.

    Conclusion : $E_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc $E_3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
11. $E_4 = \left\{ f(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{R} \right\}$.
    $E_4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (cf. exercice 2 du cours). $E_4$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
12. $E_5$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel car il ne contient pas la fonction nulle. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

    $$0 + a(x) \times 0 = 0 \quad (y \leftarrow 0).$$

**Exercice 2.** Montrer que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

1. l'ensemble des nombres complexes imaginaires purs.
2. l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. l'ensemble $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tM = M \right\}$ des matrices symétriques de taille $n \times n$.
5. l'ensemble des fonctions paires (impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
6. l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ (avec $n \in \mathbb{N}$ fixé).

**Correction**

1. $i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\}$.
    - $i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
    - $0 \in i\mathbb{R}$ (car $0 = i \times 0$).
    - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $z,\ z' \in i\mathbb{R}$. Alors $z = iy$ et $z' = iy'$ avec $y, y' \in \mathbb{R}$ et

    $$\begin{aligned} \alpha z + \beta z' &= \alpha iy + \beta iy' \\ &= i \underbrace{(\alpha y + \beta y')}_{\in \mathbb{R}}. \end{aligned}$$

    Donc $\alpha z + \beta z' \in i\mathbb{R}$.

   Conclusion : $i\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. On note $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
    - $D(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
    - $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (la fonction nulle est dérivable).
    - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $f, g \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $\alpha f + \beta g$ est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

    $$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x).$$

    Donc $\alpha f + \beta g \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

   Conclusion : $D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
    - $D_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
    - La matrice nulle est diagonale donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in D_n(\mathbb{R})$.
    - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$, $B =$

$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$ deux matrices de $D_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\alpha A + \beta B = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha a_2 + \beta b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha a_n + \beta b_n \end{pmatrix}.$$

Donc $\alpha A + \beta B \in D_n(\mathbb{R})$.
Conclusion : $D_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
 - La matrice nulle est symétrique donc $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrons que $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $(\alpha A + \beta B)^T = \alpha A + \beta B$. On a :

$$\begin{aligned} (\alpha A + \beta B)^T &= \alpha A^T + \beta B^T \\ &= \alpha A + \beta B \quad (\text{car } A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))\,. \end{aligned}$$

 Donc $\alpha A + \beta B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Conclusion : $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

5. On note $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $f \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \iff \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
 - $P(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
 - $0_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})} \in D(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (la fonction nulle est paire ($f \leftarrow 0$)).
 - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $f, g \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrons que la fonction $\alpha f + \beta g$ est paire. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)(-x) &= \alpha f(-x) + \beta g(-x). \\ &= \alpha f(x) + \beta g(x) \quad (\text{car } f \text{ et } g \text{ sont paires}). \end{aligned}$$

 Donc $\alpha f + \beta g \in P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conclusion : $P(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

6. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n$.
 - $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).
 - $0 \in \mathbb{R}_n[X]$.
 - Soient $\alpha, \beta$ des réels et $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Alors

$$\deg(\alpha P + \beta Q) \leqslant n.$$

 Donc $\alpha P + \beta Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

Conclusion : $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Donc $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 3.** Soients $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$ et

$$G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}\,.$$

1. Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer $F \cap G$.

**Correction**

1.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F &\iff \boxed{x} + y - z = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).}$

Donc $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} G &= \left\{ \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \middle| \, a,b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right).}$

Donc $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. On sait que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \cap G &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G \text{ et } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \text{ et } x+y-z=0 \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \\ &\qquad \text{et } (a-b)+(a+b)-(a-3b)=0 \\ &\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b \\ a+b \\ a-3b \end{pmatrix} \text{ et } a=-3b \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3b-b \\ -3b+b \\ -3b-3b \end{pmatrix} \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4b \\ -2b \\ -6b \end{pmatrix} \\ &\iff \exists b \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{F \cap G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix}\right) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right).}$

**Exercice 4.** Soit $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} |\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

**Correction**

– $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de référence).

- La suite nulle appartient à $F$ (car $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 = n \times 0 + 0$).
- Soient $\alpha, \beta$ des réels et $(u_n), (v_n)$ deux suites de $F$. On pose $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la suite $(w_n)$ appartient à $F$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= \alpha u_{n+2} + \beta v_{n+2} \\ &= \alpha\left(n u_{n+1} + u_n\right) + \beta\left(n v_{n+1} + v_n\right) \\ &= n\left(\alpha u_{n+1} + \beta v_{n+1}\right) + \left(\alpha u_n + \beta v_n\right) \\ &= n w_{n+1} + w_n. \end{aligned}$$

Donc $(w_n) \in F$, c'est-à-dire $(\alpha u_n + \beta v_n) \in F$.

Conclusion : $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Donc $F$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**Exercice 5.** Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ? Si ce n'est pas le cas, déterminer une relation linéaire liant ces vecteurs :

1. $(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, 2, 2)$.
2. $(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.
3. $(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 2, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (1, -1, -2)$.
4. $(v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, -1, 1)$, $v_2 = (2, -1, 3)$ et $v_3 = (-1, 1, -1)$.

**Exercice 6.**
1. Trouver deux vecteurs engendrant le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$.
2. Trouver l'équation du plan de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (1, 0, 1)$ et $v_2 = (1, -1, -1)$.

**Exercice 7.** Trouver la dimension des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants et en donner une base.

1. $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\mathcal{M}_{pq}(\mathbb{R})$, $p, q \in \mathbb{N}$.
4. l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré $\leq n$, $n \in \mathbb{N}$.
5. l'espace $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques de taille $n$, $n \in \mathbb{N}$.
6. l'espace $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques de taille $n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 8.** Soient $v_1 = (0, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 0)$.

1. Montrer que les vecteurs $v_1$, $v_2$ et $v_3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $v = (1, 1, 1)$.

**Exercice 9.**
1. Les familles suivantes de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ sont-elles libres ?
   (a) $(P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + 2X$ et $P_3 = 1 + X + X^4$.
   (b) $(P_1, P_2, P_3)$ avec $P_1 = 1 + X^2$, $P_2 = 1 - X + X^2$ et $P_3 = 1 + 2X + X^2$.
2. Soient $P_1 = 1, \quad P_2 = 1 + X \quad$ et $\quad P_3 = 1 + X + X^2$.
   (a) Montrer que la famille $(P_1, P_2, P_3)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Déterminer les coordonnées de $P = 2 + 3X - X^2$ dans cette base.

**Exercice 10.** On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Décrire l'ensemble $\mathscr{H}$ des éléments $X \in \mathbb{R}^3$ tels que l'on ait $A.X = 0_{\mathbb{R}^3}$.

**Exercice 11.** On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ :

$$u_1 = (1, -2, 1, 2),\ u_2 = (1, -3, 1, 2),\ u_3 = (2, -4, 3, 4) \text{ et } u_4 = (1, -1, 2, 3).$$

1. Montrer que $(u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
2. Soient $a, b, c, d$ des nombres réels. Calculer les coordonnées du vecteur $(a, b, c, d)$ dans la base $(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

3. Calculer les coordonnées, dans la base $(u_1, u_2, u_3, u_4)$, de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 12.** Parmi les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^4$, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels et lorsque c'est le cas, en donner une base :

1. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}$.
2. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 1\}$.
3. $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0\}$.
4. $\{(3a+b, a-b, a+5b, 2a+b) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

## Correction

$F_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\}$.

$F_1$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ ?

$F_1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ parce qu'il s'agit des solutions d'une équation linéaire homogène.

Lorsque la description est une équation, il faut commencer par résoudre cette équation (ou système).

$$3x - y + t = 0$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \boxed{1} & \mid 0 \end{pmatrix}$$

$$3x - y + t = 0 \iff \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = -3x + y \end{cases}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -3x+y \end{pmatrix}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \\ -3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}}_{v_1} + y \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} + z \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}.$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - y + t = 0\} \\ &= \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

Donc $(v_1, v_2, v_3)$ est une famille génératrice de $F_1$.

De plus, $(v_1, v_2, v_3)$ est libre (le vérifier). Donc $(v_1, v_2, v_3)$ constitue une base de $F_1$.

$F_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z + t = 1\}$.

$(0,0,0,0) \notin F_2$ donc $F_2$ n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

$$F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x + t = 0 \text{ et } 2x + y - z = 0 \right\}.$$

$$(S) \begin{cases} x + t = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$F_3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ car il s'agit des solutions de $(S)$, système linéaire homogène.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} = -t \\ \boxed{y} = z + 2t \\ z = z \\ t = t \end{cases} \quad (z,t) \in \mathbb{R}^2$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ z+2t \\ z \\ t \end{pmatrix}, \ (z,t) \in \mathbb{R}^2$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc

$$F_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$$

donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $F_3$.

De plus, cette famille est libre (coordonnées non proportionnelles). La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ constitue donc une base de $F_3$.

$$F_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 3a+b \\ a-b \\ a+5b \\ 2a+b \end{pmatrix} \middle| \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 3a+b \\ a-b \\ a+5b \\ 2a+b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3a \\ a \\ a \\ 2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b \\ -b \\ 5b \\ b \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc $F_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ (j'ai donc démontré que $F_4$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$)

Conclusion : $\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ est une famille génératrice de $F_4$. Cette famille étant également libre (coordonnées non proportionnelles), il s'agit d'une base de $F_4$.

**Exercice 13.** Vérifier que les ensembles suivants, munis des opérations classiques, sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels et déterminer une base de ces espaces :

1. $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x+y=y+z=0\right\}$.
2. $\{P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ tels que } P(X) = P(1-X)\}$.

3. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n + u_{n+1} = 0\}$.

**Exercice 14.** On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ :

$$u = (2, 3, -1),\ v = (1, -1, -2),\ x = (3, 7, 0) \text{ et } y = (5, 0, -7).$$

On note $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ et $G = \mathrm{Vect}(x, y)$.

1. Montrer que l'on a $F = G$.
2. Trouver une équation de $F$.

**Correction.** 1. $u_1 = u_3 + 4u_4$ donc $u_1 \in \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.

$u_2 = 2u_3 + 7u_4$ donc $u_2 \in \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.

Donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subset \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.

$(u_1, u_2)$ est une base de $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ (le justifier), donc $\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2)) = \mathrm{Card}(u_1, u_2) = 2$. De même $\dim(\mathrm{Vect}(u_3, u_4)) = 2$.

Comme $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) \subset \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$ et $\dim(\mathrm{Vect}(u_1, u_2)) = \dim(\mathrm{Vect}(u_3, u_4))$, on a $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.

2. Montrer que $(u_1, u_2)$ est libre.

On suppose $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$. Alors $\begin{cases} -3\lambda_1 - 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$, donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = -2\lambda_2 = 0$. Les vecteurs $u_1$ et $u_2$ sont donc linéairement indépendants.

On complète la famille libre $(u_1, u_2)$ avec deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Montrons que $(u_1, u_2, e_1, e_2)$ constitue une base de $\mathbb{R}^4$.

On suppose $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 e_1 + \lambda_4 e_4 = 0$. Alors $\begin{cases} -3\lambda_1 - 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$,

donc $\begin{cases} \lambda_2 = 0 & (L_3) \\ \lambda_1 = -\lambda_2 = 0 & (L_4) \\ \lambda_3 = 3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 & (L_1) \\ \lambda_4 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 & (L_2) \end{cases}$. La famille $(u_1, u_2, e_1, e_2)$ est donc libre.

De plus $\mathrm{Card}(u_1, u_2, e_1, e_2) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, donc $(u_1, u_2, e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 15.** Soit $a$ un nombre réel. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(a+2, a, a-2)$, $(1, a, -1)$ et $(a, -a, 1)$ ?

**Exercice 16.** On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$ :

$$u_1 = (-3, 1, 0, 2),\ u_2 = (-5, 2, 1, 2),\ u_3 = (1, 1, 4, -6) \text{ et } u_4 = (-1, 0, -1, 2).$$

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \mathrm{Vect}(u_3, u_4)$.
2. Montrer que les vecteurs $u_1$ et $u_2$ sont linéairement indépendants. Compléter ces vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^4$.

**Exercice 17.** Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$u = (1,0,1,0),\ v = (0,1,-1,0),\ w = (1,1,1,1),\ x = (0,0,1,0) \text{ et } y = (1,1,0,-1).$$

Soient $F = \text{Vect}(u, v, w)$ et $G = \text{Vect}(x, y)$.
Quelles sont les dimensions de $F$, $G$, $F + G$ et $F \cap G$ ?

**Correction.** On détermine le rang de la famille $(u, v, w)$ en opérant sur les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $\dim(F) = \text{rg}(u, v, w) = 3$.

La famille $(x, y)$ est une famille génératrice de $G$ et est libre (coordonnées non proportionnelles). La famille $(x, y)$ constitue donc une base de $G$ et $\dim(G) = \text{Card}(x, y) = 2$.

On a $F + G = \text{Vect}(u, v, w) + \text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(u, v, w, x, y)$.

On détermine le rang de la famille $(u, v, w, x, y)$ en opérant sur les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_1 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \\ C_5 \leftarrow C_5 - C_2 \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & -1 \end{pmatrix} \qquad C_4 \leftarrow C_4 - C_3$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}. \qquad C_5 \leftarrow C_5 - C_4$$

Ainsi $\dim(F + G) = \text{rg}\,(u, v, w, x, y) = 4$.

D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$ et donc

$$4 = 2 + 3 - \dim(F \cap G) \quad \text{ie} \quad \dim(F \cap G) = 1.$$

Remarque : Les espaces $F$ et $G$ ne sont pas en somme directe car $F \cap G \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

**Exercice 18.** Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer une base et un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants :

1. $F = \text{Vect}(u, v)$ où $u = (1, 1, 0)$ et $v = (2, 1, 1)$,
2. $F = \text{Vect}(u, v, w)$ où $u = (-1, 1, 0), v = (2, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 1)$,
3. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}$.

**Exercice 19.** On considère dans $\mathbb{R}^4$ les cinq vecteurs suivants :

$v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (0,0,1,0), v_3 = (0,1,0,0), v_4 = (0,0,0,1) \text{et} v_5 = (0,1,0,1)$.

Dire si les sous-espaces vectoriels suivants sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

1. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_3)$ ?
2. $\text{Vect}(v_1, v_2)$ et $\text{Vect}(v_4, v_5)$ ?
3. $\text{Vect}(v_1, v_3, v_4)$ et $\text{Vect}(v_2, v_5)$ ?
4. $\text{Vect}(v_1, v_4)$ et $\text{Vect}(v_3, v_5)$ ?

**Correction.** Rappel :

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff F + G = E \text{ et } F \cap G = \{0\} \\ &\iff \dim(F+G) = \dim(E) \text{ et } \dim(F \cap G) = 0. \end{aligned}$$

1. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_3)$. Donc $F + G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3)$ et $\dim(F+G) \leqslant 3$. D'où $\dim(F+G) \neq \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$.

Conclusion : $F$ et $G$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

2. On pose $F = \text{Vect}(v_1, v_2)$ et $G = \text{Vect}(v_4, v_5)$. La famille $(v_1, v_2)$ constitue une base de $F$ (le vérifier) et $\dim(F) = \text{Card}(v_1, v_2) = 2$. De même, $\dim(G) = 2$.

$F + G = \text{Vect}(v_1, v_2, v_4, v_5)$. On détermine le rang de la famille $(v_1, v_2, v_4, v_5)$ en opérant sur les colonnes de la matrice

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \quad C_4 \leftarrow C_4 - C_3$$

Ainsi $\dim(F+G) = \text{rg}\,(v_1, v_2, v_4, v_5) = 4$, donc $F + G = \mathbb{R}^4$.

On en déduit, en appliquant la formule de Grassmann, que

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

Conclusion : $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

3. On pose $F = \text{Vect}\,(v_1, v_3, v_4)$ et $G = \text{Vect}(v_2, v_5)$.