

Feuille d'exercices n°18

Applications linéaires

Définitions

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires? Si oui, déterminer leur noyau et leur image. Préciser alors si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$;
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$;
6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y)$;
7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.

Exercice 2. On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t)dt$. Montrer que J est une application linéaire de E dans \mathbb{R} .

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et déterminer son automorphisme réciproque.

Exercice 4. On considère les applications

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, 2x + y, y)$$

et

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 5x - 2y + z)$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Déterminer $\text{Ker } f$, $\text{Ker } g$, $\text{Im } f$ et $\text{Im } g$. Que peut-on en déduire?
3. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de \mathbb{R}^2 .

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$.
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$.
 $(x, y, z) \mapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . En déduire une base de $\text{Im } f$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
4. L'application f est-elle injective? surjective?

Exercice 7. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Représentation matricielle et rang

Exercice 8. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\dim(\text{Ker } f)$ et $\text{rg}(f)$.

Exercice 9. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes et interpréter le résultat.

1. Dans \mathbb{R}^4 : $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$, où

$$x_1 = (1, 1, 1, 1), \quad x_2 = (1, -1, 1, -1) \text{ et } x_3 = (1, 0, 1, 0).$$

2. Dans \mathbb{R}^4 : $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où

$$x_1 = (1, 1, 0, 1), \quad x_2 = (1, -1, 1, 0), \quad x_3 = (2, 0, 1, 1) \text{ et } x_4 = (0, 2, -1, 1).$$

3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où

$$P_1 = X^2, \quad P_2 = X^2 + 2X \text{ et } P_3 = X + 1.$$

4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où

$$P_1 = X^2 + 2X + 1, \quad P_2 = X^2 - X + 1 \text{ et } P_3 = X^2 - 7X + 1.$$

Exercice 10. Déterminer les matrices dans les bases canoniques et le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z)$

2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x - 5y + 4z$

3. $f_3 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto P - XP'$

4. $f_4 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$

Exercice 11. Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$.
 $(x, y, z) \mapsto (-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.
3. Montrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Écrire la matrice de u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{F} .

Exercice 12. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = w_1, \quad u(e_2) = w_2, \quad u(e_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3 . En déduire la matrice de u dans \mathcal{B} .
 (b) Déterminer l'expression de u .
2. (a) Trouver une base de $\text{Ker}(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
 (b) Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\text{Ker}(u - \text{Id})$ et $\text{Im}(u - \text{Id})$ où Id désigne l'identité de \mathbb{R}^3 . En déduire que $u - \text{Id}$ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Exercice 13. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ celle de \mathbb{R}^2 . Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2$$

et

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 , puis que $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Exercice 14. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_2 \end{cases}.$$

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .
2. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Déterminer la matrice D .
3. On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Déterminer P et calculer P^{-1} .
4. Quelle relation lie les matrices A , D , P et P^{-1} ?
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique \mathcal{B} par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (1, 0, 1)$, $e'_2 = (-1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de f dans \mathcal{C} .
3. Calculer la matrice de f^n dans \mathcal{B} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Projections et symétries

Exercice 16. Montrer que l'application

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (4x - 2y, 6x - 3y)$$

est une projection et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Exercice 18. On se place dans \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère le plan \mathcal{P} et la droite \mathcal{D} d'équations respectives :

$$\mathcal{P}: x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}: \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{D} sont supplémentaires. Trouver une base de \mathcal{P} et une base de \mathcal{D} . On note \mathcal{B}' la réunion de ces deux bases.
2. On note p la projection sur \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{D} . Déterminer la matrice de p dans la base \mathcal{B}' . En déduire la matrice de p dans la base canonique \mathcal{B} .
3. Faire de même avec la symétrie s par rapport à \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{D} .