

Feuille d'exercices n°18 – Correction

Applications linéaires

Définitions

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires? Si oui, déterminer leur noyau et leur image. Préciser alors si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.

1. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$;
2. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + 1$;
3. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy$;
4. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x - z$;
5. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x$;
6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (0, 2x + y, x + 3y)$;
7. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.

Correction.

1. **Linéarité** : Soient $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') \\ &= (\lambda x + \lambda y + 2\lambda z) + (x' + y' + 2z') \\ &= \lambda(x + y + 2z) + (x' + y' + 2z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Injective ?

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y, z) = 0 \\ &\iff x + y + 2z = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = -y - 2z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

On note $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a montré que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u, v).$$

De plus, (u, v) est libre (coordonnées non proportionnelles).

La famille (u, v) constitue donc une base de $\text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

Comme $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective.

Surjective ?

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) \\ &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect}(1, 1, 2) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, 0, 0\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$, donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Comme $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, f est surjective.

Bijective ? f n'est pas bijective.

2. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car $f(0, 0) \neq 0$.

3. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car $f(0, 1) + f(1, 0) \neq f(1, 1)$.

4. **Linéarité** : Soient $X = (x, y, z), X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= (\lambda x + x') - (\lambda z + z') \\ &= (\lambda x - \lambda z) + (x' - z') \\ &= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \\ &= \lambda f(X) + f(X').\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$.

Injective ?

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y, z) = 0 \\ &\iff \boxed{x} - z = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = z \\ y = y \\ z = z \end{cases} \text{ avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2 \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } (y, z) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

On note $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a montré que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}(u, v).$$

De plus, (u, v) est libre (coordonnées non proportionnelles).

La famille (u, v) constitue donc une base de $\text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 2$.

Comme $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective.

Surjective ?

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\text{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) \\ &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect}(1, 0, -1) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, 0, 0\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right).\end{aligned}$$

$\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$, donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

Comme $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$, f est surjective.

Bijective ? f n'est pas bijective.

5. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car $f(0) \neq 0$.

6. **Linéarité** : Soient $X = (x, y)$, $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (0, 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + 3(\lambda y + y')) \\ &= (0, \lambda(2x + y) + (2x' + y'), \lambda(x + 3y) + (x' + 3y')) \\ &= (0, \lambda(2x + y), \lambda(x + 3y)) + (0, 2x' + y', x' + 3y') \\ &= \lambda(0, 2x + y, x + 3y) + (0, 2x' + y', x' + 3y') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$. Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Injective ?

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff f(x, y) = (0, 0, 0) \\ &\iff (0, 2x + y, x + 3y) = (0, 0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}}.$$

Donc f est injective.

Surjective ?

On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 .

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) \\ &= \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\# \text{ opération sur les colonnes} \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{-5} \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{-5} \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{Im}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

or f est surjective $\iff \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$

Donc f n'est pas surjective car $\dim(\text{Im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.

Bijective ? f n'est pas bijective.

7. **Linéarité** : f n'est pas linéaire car

$$f(0, 1) + f(1, 0) \neq f(1, 1).$$

Exercice 2. On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . Soit $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $J(f) = \int_0^1 f(t) dt$. Montrer que J est une application linéaire de E dans \mathbb{R} .

Correction.

Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} J(\lambda f + g) &= \int_0^1 (\lambda f + g)(t) dt \\ &= \int_0^1 (\lambda f(t) + g(t)) dt \\ &= \lambda \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 g(t) dt \\ &= \lambda J(f) + J(g). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $J(\lambda f + g) = \lambda J(f) + J(g)$.

Conclusion : J est une application linéaire de E dans \mathbb{R} .

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x + y, x - y)$. Montrer que f est un automorphisme de \mathbb{R}^2 et déterminer son automorphisme réciproque.

Correction.

Soient $X = (x, y)$, $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), (\lambda x + x') - (\lambda y + y')) \\ &= (\lambda x + \lambda y, \lambda x - \lambda y) + (x' + y', x' - y') \\ &= \lambda(x + y, x - y) + (x' + y', x' - y') \\ &= \lambda f(x, y) + f(x', y') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ (f est un endomorphisme de \mathbb{R}^2).

Montrons que f est injective.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y) = (0, 0) \\ &\iff (x + y, x - y) = (0, 0) \\ &\iff x = 0 \text{ et } y = 0 \\ &\iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

Donc

$$\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}.$$

Donc f est injective.

f est un endomorphisme injectif de \mathbb{R}^2 , donc f est bijective (théorème du cours). L'application f est donc un automorphisme de \mathbb{R}^2 .

Expression de f^{-1} : On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 . On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{-1}) &= (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right).$$

$f^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
$(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{2}(x + y), \frac{1}{2}(x - y) \right)$

Exercice 4. On considère les applications

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \mapsto (x, 2x + y, y)$$

et

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y, 5x - 2y + z)$$

1. Montrer que f et g sont des applications linéaires.
2. Déterminer $\text{Ker} f$, $\text{Ker} g$, $\text{Im} f$ et $\text{Im} g$. Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que $g \circ f$ est un automorphisme de \mathbb{R}^2 .

Correction.

1. Soient $X = (x, y)$, $X' = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= ((\lambda x + x'), 2(\lambda x + x') + (\lambda y + y'), \lambda y + y') \\ &= (\lambda x, 2\lambda x + \lambda y, \lambda y) + (x', 2x' + y', y') \\ &= \lambda(x, 2x + y, y) + (x', 2x' + y', y') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$.
Conclusion : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Soient $X = (x, y, z)$, $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(\lambda X + X') &= g(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\ &= ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), 5(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y') + (\lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + \lambda y, 5\lambda x - 2\lambda y + \lambda z) + (x' + y', 5x' - 2y' + z') \\ &= \lambda(x + y, 5x - 2y + z) + (x', 2x' + y', y') \\ &= \lambda g(X) + g(X'). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $g(\lambda X + X') = \lambda g(X) + g(X')$.
Conclusion : $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

(2)

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(f) &\iff f(x, y) = (0, 0, 0) \\ &\iff (x, 2x + y, y) = (0, 0, 0) \\ &\iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\} \text{ et } f \text{ est injective.}}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 2, 0), (0, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\# \text{ opération sur les colonnes} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ constitue une base de } \text{Im}(f) \text{ et } \dim(\text{Im}(f)) = 2.$$

Comme $\dim(\text{Im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ et f n'est pas surjective.

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(g) &\iff g(x, y, z) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\text{Ker}(g) = \text{Vect}((-1, 1, 7))$ et g n'est pas injective.

$$\begin{aligned} \text{Im}(g) &= \text{Vect}(g(1, 0, 0), g(0, 1, 0), g(0, 0, 1)) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(g) = \mathbb{R}^2$ et g est surjective.

3. En tant que composée d'applications linéaires, $g \circ f$ est linéaire. L'application $g \circ f$ est donc un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

Expression de $g \circ f$: On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^2 et \mathcal{C} la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(g \circ f) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(g \circ f)(x, y) = (3x + y, x - y).$$

Montrons que $g \circ f$ est injective.

$$\begin{aligned} (x, y) \in \text{Ker}(g \circ f) &\iff (g \circ f)(x, y) = (0, 0) \\ &\iff \begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \\ &\iff (x, y) = (0, 0). \end{aligned}$$

$\text{Ker}(g \circ f) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $g \circ f$ est injective.

Conclusion : $g \circ f$ est un endomorphisme injectif de \mathbb{R}^2 . Il s'agit donc d'un automorphisme de \mathbb{R}^2 .

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $P \mapsto (P(-1), P(0), P(1))$.

Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur \mathbb{R}^3 .

Correction.

Soient P et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda P + Q) &= ((\lambda P + Q)(-1), (\lambda P + Q)(0), (\lambda P + Q)(1)) \\ &= (\lambda P(-1) + Q(-1), \lambda P(0) + Q(0), \lambda P(1) + Q(1)) \\ &= (\lambda P(-1), \lambda P(0), \lambda P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) \\ &= \lambda (P(-1), P(0), P(1)) + (Q(-1), Q(0), Q(1)) \\ &= \lambda f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout P et $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda P + Q) = \lambda f(P) + f(Q)$.

Conclusion : $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$.

Montrons que f est injective.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. On a :

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker}(f) &\iff f(P) = (0, 0, 0) \\
&\iff (P(-1), P(0), P(1)) = (0, 0, 0) \\
&\iff -1, 0, 1 \text{ sont des racines de } P \\
&\iff P = 0,
\end{aligned}$$

car un polynôme non nul de $\mathbb{R}_2[X]$ admet au plus deux racines distinctes.

Conclusion : $\boxed{\text{Ker}(f) = \{0\}}$ et f est injective.

Montrons que f est surjective.

$$\begin{aligned}
\text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&\# \text{ on opère sur les colonnes} \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi $\dim(\text{Im}(f)) = 3$.

Comme $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\boxed{\text{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$$

et $\boxed{f \text{ est surjective.}}$

Conclusion : f est bijective. Il s'agit donc d'un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur \mathbb{R}^3 .

Remarque : Il est possible de conclure plus rapidement :

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathbb{R}^3)$, f est injective et $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc f est un isomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ sur \mathbb{R}^3 .

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$
 $(x, y, z) \mapsto (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z)$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Calculer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de \mathbb{R}^3 . En déduire une base de $\text{Im}f$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}f$.
4. L'application f est-elle injective ? surjective ?

(1) Soient $X = (x, y, z)$, $X' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') \\
&= \begin{pmatrix} (\lambda x + x') + (\lambda z + z') \\ (\lambda y + y') - (\lambda x + x') \\ (\lambda z + z') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') + (\lambda y + y') + 2(\lambda z + z') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda z \\ \lambda y - \lambda x \\ \lambda z + \lambda y \\ \lambda x + \lambda y + 2\lambda z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' + z' \\ y' - x' \\ z' + y' \\ x' + y' + 2z' \end{pmatrix} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} x + z \\ y - x \\ z + y \\ x + y + 2z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' + z' \\ y' - x' \\ z' + y' \\ x' + y' + 2z' \end{pmatrix} \\
&= \lambda f(x, y, z) + f(x', y', z') \\
&= \lambda f(X) + f(X').
\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X').$$

Donc $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

(2) Calculer $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$.

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f(1, 0, 0) \\ &= (1, -1, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(e_2) &= f(0, 1, 0) \\ &= (0, 1, 1, 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(e_3) &= f(0, 0, 1) \\ &= (1, 0, 1, 2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= f(\mathbb{R}^3) \\ &= \text{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

en opérant sur les colonnes

$$\begin{aligned} &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\text{Im}(f)$ et $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.

(3) Déterminer une base du noyau :

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$$

$$\iff f(x, y, z) = \mathbf{0}$$

$$\iff (x + z, y - x, z + y, x + y + 2z) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y - x = 0 \\ z + y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R})$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\text{Ker}(f)$ et $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

(4) f n'est pas injective car $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 0$,

f n'est pas surjective car $\dim(\text{Im}(f)) \neq \dim(\mathbb{R}^4)$.

Exercice 7. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont stables par g .

Correction.

Définition. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et G un sous-espace vectoriel de E . G est dit stable par f si et seulement si $f(G) \subset G$, si et seulement si pour tout $x \in G$, $f(x) \in G$.

Montrons que $\text{Ker}(f)$ est stable par g , c'est-à-dire que pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, $g(x) \in \text{Ker}(f)$.

Soit $x \in \text{Ker}(f)$. On a

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= g(f(x)) \quad (\text{car } f \circ g = g \circ f) \\ &= g(0) \quad (\text{car } x \in \text{Ker}(f)) \\ &= 0 \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}). \end{aligned}$$

Donc $g(x) \in \text{Ker}(f)$.

Ainsi pour tout $x \in \text{Ker}(f)$, $g(x) \in \text{Ker}(f)$. $\text{Ker}(f)$ est stable par g .

Montrons que $\text{Im}(f)$ est stable par g , c'est-à-dire que pour tout $y \in \text{Im}(f)$, $g(y) \in \text{Im}(f)$.

Soit $y \in \text{Im}(f)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On

$$\begin{aligned} g(y) &= g(f(x)) \\ &= f(g(x)) \quad (\text{car } f \circ g = g \circ f) \\ &\in \text{Im}(f) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $y \in \text{Im}(f)$, $g(y) \in \text{Im}(f)$. $\text{Im}(f)$ est stable par g .

Représentation matricielle et rang

Exercice 8. On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer $\dim(\text{Ker}f)$ et $\text{rg}(f)$.

Correction.

$$\begin{aligned} A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow C_2 - C_1, C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} && C_2 \leftarrow \frac{1}{3}C_2, C_3 \leftarrow -C_3 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} && C_3 \leftarrow C_3 - C_2 \end{aligned}$$

Donc $\text{rg}(f) = \text{rg}(A) = 2$.

D'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f).$$

donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$.

Remarque : f n'est pas injective car $\dim(\text{Ker}(f)) \neq 0$ et f n'est pas surjective car $\text{rg}(f) \neq \dim(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 9. Déterminer le rang des familles de vecteurs suivantes et interpréter le résultat.

1. Dans \mathbb{R}^4 : $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3)$, où

$$x_1 = (1, 1, 1, 1), x_2 = (1, -1, 1, -1) \text{ et } x_3 = (1, 0, 1, 0).$$

2. Dans \mathbb{R}^4 : $\mathcal{F} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, où

$$x_1 = (1, 1, 0, 1), x_2 = (1, -1, 1, 0), x_3 = (2, 0, 1, 1) \text{ et } x_4 = (0, 2, -1, 1).$$

3. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où

$$P_1 = X^2, P_2 = X^2 + 2X \text{ et } P_3 = X + 1.$$

4. Dans $\mathbb{R}_2[X]$: $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$, où

$$P_1 = X^2 + 2X + 1, P_2 = X^2 - X + 1 \text{ et } P_3 = X^2 - 7X + 1.$$

Correction.

1.

$$\begin{aligned}\text{Vect}(\mathcal{F}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$ et \mathcal{F} est une famille liée (car $\text{rg}(\mathcal{F}) \neq \text{Card}(\mathcal{F})$).

2.

$$\begin{aligned}\text{Vect}(\mathcal{F}) &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \boxed{-2} \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{Vect}(\mathcal{F})) = 2$ et \mathcal{F} est une famille liée (car $\text{rg}(\mathcal{F}) \neq \text{Card}(\mathcal{F})$).

3. On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

$P_1 = X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + 1 \times X^2$. Les coordonnées de P_1 dans la base \mathcal{B} sont donc $(0, 0, 1)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$P_2 = X^2 + 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 1 \times X^2$. Les coordonnées de P_2 dans la base \mathcal{B} sont donc $(0, 2, 1)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$P_3 = X + 1 = 1 \times 1 + 1 \times X + 0 \times X^2$. Les coordonnées de P_3 dans la base \mathcal{B} sont donc $(1, 1, 0)$ et

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1}_1 \\ 0 & \boxed{2}_2 & 1 \\ \boxed{1}_3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{rg}(\mathcal{F}) = 3$ et $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ est libre (car $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{Card}(\mathcal{F})$).

4.

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P_1, P_2, P_3) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Conclusion : $\text{rg}(\mathcal{F}) = 2$ et \mathcal{F} est une famille liée (car $\text{rg}(\mathcal{F}) \neq \text{Card}(\mathcal{F})$).

Exercice 10. Déterminer les matrices dans les bases canoniques et le rang des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (x - y, y - z)$
2. $f_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y, z) \mapsto x - 5y + 4z$
3. $f_3 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$
 $P \mapsto P - XP'$

$$\begin{aligned}4. f_4 : \mathbb{R}_3[X] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P &\mapsto (P(-1), P(0), P(1))\end{aligned}$$

1.

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & C_2 \leftarrow C_2 + C_1 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} & C_3 \leftarrow C_3 + C_2\end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{rg}(f_1) = \text{rg}(\text{Mat}_{\text{can}}(f_1)) = 2.$$

Remarque : $\text{rg}(f_1) = \dim(\mathbb{R}^2)$ donc f_1 est surjective.

Le théorème du rang assure que $\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f_1)) + \text{rg}(f_1)$. On a donc $\dim(\text{Ker}(f_1)) = 1$. Comme $\dim(\text{Ker}(f_1)) \neq 0$, f_1 n'est pas injective.

2.

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_2) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_2) \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ C_2 \leftarrow C_2 + 5C_1, C_3 \leftarrow C_3 - 4C_1.$$

$$\text{Donc } \text{rg}(f_2) = 1.$$

Remarque : $\dim(\text{Im} f_2) = 1 = \dim(\mathbb{R})$, donc f_2 est surjective.

D'après le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(f_2)) + \text{rg}(f_2).$$

Donc $\dim(\text{Ker}(f_2)) = 2 \neq 0$ et f_2 n'est pas injective.

3. $f_3 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ c'est-à-dire
 $P \mapsto P - XP'$

$$f_3(P) = P - XP'$$

Calculer $f_3(1)$, $f_3(X)$ et $f_3(X^2)$.

On a $f_3(1) = 1 - X[1]' = 1$, donc les coordonnées de $f_3(1)$ dans $(1, X, X^2)$ sont $(1, 0, 0)$ et

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_3(1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $f_3(X) = X - X[X]' = 0$, donc les coordonnées de $f_3(X)$ dans $(1, X, X^2)$ sont $(0, 0, 0)$ et

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_3(X)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a $f_3(X^2) = X^2 - X[X^2]' = -X^2$, donc les coordonnées de $f_3(X^2)$ dans $(1, X, X^2)$ sont $(0, 0, -1)$ et

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_3(X^2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\text{Mat}_{\text{can}}(f_3) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}$$

et $\boxed{\text{rg}(f_3) = 2}$

Remarque : f_3 n'est pas surjective car $\text{rg}(f_3) \neq \dim(\mathbb{R}_2[X])$.

f_3 n'est pas injective car $\dim(\text{Ker}(f_3)) = 1 \neq 0$. (conséquence du théorème du rang).

4.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\text{can}}(f_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \boxed{2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{rg}(f_4) = 3}$.

Exercice 11. Soit $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$.
 $(x, y, z) \mapsto (-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$

1. Montrer que u est linéaire.
2. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4 . Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.
3. Montrer que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, u(e_1), u(e_2))$ est une base de \mathbb{R}^4 .
4. Écrire la matrice de u dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{F} .

Correction.

1. Soient $X = (x, y, z)$ et $X' = (x', y', z')$ des éléments de \mathbb{R}^3 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u(\lambda X + X') &= u \begin{pmatrix} \lambda x + x' \\ \lambda y + y' \\ \lambda z + z' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -(\lambda x + x') + (\lambda y + y') \\ (\lambda x + x') - (\lambda y + y') \\ -(\lambda x + x') + (\lambda z + z') \\ -(\lambda y + y') + (\lambda z + z') \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} -x + y \\ x - y \\ -x + z \\ -y + z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x' + y' \\ x' - y' \\ -x' + z' \\ -y' + z' \end{pmatrix} \\ &= \lambda u(X) + u(X'). \end{aligned}$$

Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u(\lambda X + X') = \lambda u(X) + u(X')$.

Conclusion : $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

2.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrons que \mathcal{F} est libre.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $af_1 + bf_2 + cu(e_1) + du(e_2) = (0, 0, 0, 0)$.

Alors

$$a(1, 0, 0, 0) + b(0, 1, 0, 0) + c(-1, 1, -1, 0) + d(1, -1, 0, -1) = (0, 0, 0, 0),$$

donc

$$\begin{cases} a - c + d = 0 \\ b + c - d = 0 \\ -c = 0 \\ -d = 0 \end{cases},$$

d'où $a = b = c = d = 0$ et \mathcal{F} est libre.

De plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}^4)$, donc \mathcal{F} est une base de \mathbb{R}^4 .

4. $u(e_1) = 0 \times f_1 + 0 \times f_2 + 1 \times u(e_1) + 0 \times u(e_2)$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_1)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$u(e_2) = 0 \times f_1 + 0 \times f_2 + 0 \times u(e_1) + 1 \times u(e_2)$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$u(e_3) = (0, 0, 1, 1) = 0 \times f_1 + 0 \times f_2 + (-1) \times u(e_1) + (-1) \times u(e_2)$, donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{F}}(u(e_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12. Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 , $w_1 = (1, -2, 0)$, $w_2 = (-1, 2, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$ et u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par la donnée des images des vecteurs de la base :

$$u(e_1) = w_1, u(e_2) = w_2, u(e_3) = w_3.$$

1. (a) Exprimer w_1, w_2, w_3 en fonction de e_1, e_2 et e_3 . En déduire la matrice de u dans \mathcal{B} .

- (b) Déterminer l'expression de u .
2. (a) Trouver une base de $\text{Ker}(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.
- (b) Montrer que $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.
3. Déterminer $\text{Ker}(u - Id)$ et $\text{Im}(u - Id)$ où Id désigne l'identité de \mathbb{R}^3 . En déduire que $u - Id$ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Correction.

1. (a) $w_1 = 1e_1 - 2e_2 + 0e_3$, $w_2 = -e_1 + 2e_2 + 0e_3$ et $w_3 = 0e_1 + 0e_2 + 2e_3$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. (b) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (x - y, -2x + 2y, 2z).$$

2. (a)

$$\text{Ker}(u) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ constitue une base de $\text{Ker}(u)$.

$$\begin{aligned} \text{Im}(u) &= \text{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ constitue une base de $\text{Im}(u)$.

2. (b) Montrons que la réunion d'une base de $\text{Ker}(u)$ et d'une base de $\text{Im}(u)$ constitue une base de \mathbb{R}^3 .

$$\text{On note } \mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Montrons que la famille \mathcal{F} est libre.

Soient a, b, c des réels tels que

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases},$$

donc

$$\begin{cases} \boxed{a} + b = 0 \\ -3\boxed{b} = 0 \\ \boxed{c} = 0 \end{cases} .$$

D'où $a = b = c = 0$.

Donc \mathcal{F} est libre.

De plus $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(\mathbb{R}^3)$, donc \mathcal{F} constitue une base de \mathbb{R}^3 .

Conclusion : $\text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u) = \mathbb{R}^3$.

3. $u - \text{Id}$ est linéaire en tant que différence d'applications linéaires.

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u - \text{Id}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u - \text{Id}) &\sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & C_1 \leftrightarrow C_2 \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Donc $\text{rg}(u - \text{Id}) = \dim(\text{Im}(u - \text{Id})) = 3$.

De plus, $\text{Im}(u - \text{Id}) \subset \mathbb{R}^3$. D'où $\text{Im}(u - \text{Id}) = \mathbb{R}^3$ par égalité des dimensions.

On en déduit que $u - \text{Id}$ est surjective.

Le théorème du rang assure que

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\text{Ker}(u - \text{Id})) + \text{rg}(u - \text{Id}).$$

On en déduit que $\dim(\text{Ker}(u - \text{Id})) = 0$ et que $u - \text{Id}$ est injective.

Conclusion : $u - \text{Id}$ est un automorphisme de \mathbb{R}^3 .

Exercice 13. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{C} = (f_1, f_2)$ celle de \mathbb{R}^2 . Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} .$$

On pose

$$e'_1 = e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_3 + e_1, \quad e'_3 = e_1 + e_2$$

et

$$f'_1 = \frac{1}{2}(f_1 + f_2), \quad f'_2 = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 , puis que $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2)$ est une base de \mathbb{R}^2 .
2. Quelle est la matrice de u dans ces nouvelles bases ?

Correction.

$$1. \mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) .$$

Montrons que \mathcal{B}' est libre.

Soient a, b, c des réels tels que

$$ae'_1 + be'_2 + ce'_3 = (0, 0, 0).$$

Alors

$$\begin{cases} b + c = 0 \\ a + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} ,$$

donc

$$\begin{cases} 2a = 0 & (L_2 + L_3 - L_1) \\ 2b = 0 & (L_1 + L_3 - L_2) \\ 2c = 0 & (L_1 + L_2 - L_3) \end{cases} .$$

D'où $a = b = c = 0$ et \mathcal{B}' est libre.

De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc \mathcal{B}' constitue une base de \mathbb{R}^3 .

On montre de manière similaire que $\mathcal{C}' = (f'_1, f'_2) = \left(\left(\frac{1}{2} \right), \left(\frac{1}{-2} \right) \right)$ constitue une base de \mathbb{R}^2 .

2. Première méthode : en utilisant la définition de $\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$.

$$\text{On a } u(e'_1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \times f'_1 + (1) \times f'_2,$$

$$u(e'_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = (3) \times f'_1 + (3) \times f'_2$$

$$\text{et } u(e'_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (6) \times f'_1 + (-4) \times f'_2.$$

Donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Deuxième méthode : en utilisant la formule de changement de bases.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) &= \text{Mat}_{\mathcal{C}', \mathcal{C}'}(\text{Id}) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= \left(P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \right)^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Exercice 14. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans \mathcal{B} est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ e'_2 = e_1 - e_3 \\ e'_3 = e_1 - e_2 \end{cases}.$$

1. Montrer que \mathcal{B}' est une base de E .
2. On pose $D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$. Déterminer la matrice D .
3. On note P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . Déterminer P et calculer P^{-1} .
4. Quelle relation lie les matrices A , D , P et P^{-1} ?
5. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1.

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$\text{rg}(\mathcal{B}') = 3 = \text{Card}(\mathcal{B}')$ donc \mathcal{B}' est libre.

De plus, $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(E)$. La famille \mathcal{B}' constitue donc une base de E .

2. •

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_1)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(e'_1) &= e'_1 \\ &= 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3. \end{aligned}$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

•

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_2)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(e'_2) &= 2e'_2 \\ &= 0e'_1 + 2e'_2 + 0e'_3. \end{aligned}$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

•

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_3)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_3) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(e'_3) &= 3e'_3 \\ &= 0e'_1 + 0e'_2 + 3e'_3. \end{aligned}$$

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_3)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Conclusion :

$$D = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3.

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Conclusion :
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Formule de changement de bases :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id})$$

d'où

$$D = P^{-1}AP$$

ie

$$A = PDP^{-1}.$$

5. On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.

or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 1 & 1 - 2^n & 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ 1 - 3^n & 1 & 1 - 3^n \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n - 2^n + 1 & 1 - 2^n & 3^n - 2^{n+1} + 1 \\ 1 - 3^n & 1 & 1 - 3^n \\ 2^n - 1 & 2^n - 1 & 2^{n+1} - 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique \mathcal{B} par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $\mathcal{C} = (e'_1, e'_2, e'_3)$ avec $e'_1 = (1, 0, 1)$, $e'_2 = (-1, 1, 0)$ et $e'_3 = (1, 1, 1)$. Montrer que \mathcal{C} est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Déterminer la matrice de f dans \mathcal{C} .
3. Calculer la matrice de f^n dans \mathcal{B} pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On montre que \mathcal{C} est libre. De plus $\text{Card}(\mathcal{C}) = \dim(\mathbb{R}^3)$. La famille \mathcal{C} constitue donc une base de \mathbb{R}^3 .

2. •

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_1)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1) \end{aligned}$$

Donc $f(e'_1) = e'_1 = 1e'_1 + 0e'_2 + 0e'_3$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

•

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_2)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_2) \end{aligned}$$

Donc $f(e'_2) = e'_2 = 0e'_1 + 1e'_2 + 0e'_3$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

•

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f(e'_3)) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_3) \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1 + e'_3) \end{aligned}$$

Donc $f(e'_3) = e'_1 + e'_3 = 1e'_1 + 0e'_2 + 1e'_3$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f(e'_3)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ (à démontrer par récurrence).}$$

D'après la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{Id}) \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) \text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\text{Id}) \\ &= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^n) \left(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

Projections et symétries

Exercice 16. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (4x - 2y, 6x - 3y) \end{aligned}$$

est une projection et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Correction.

f est une projection si et seulement si f est linéaire et $f \circ f = f$.

Montrons que f est linéaire.

Soient $X = (x, y)$ et $X' = (x', y')$ des éléments de \mathbb{R}^2 et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(\lambda X + X') &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') \\ &= (4(\lambda x + x') - 2(\lambda y + y'), 6(\lambda x + x') - 3(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(4x - 2y, 6x - 3y) + (4x' - 2y', 6x' - 3y') \\ &= \lambda f(X) + f(X'). \end{aligned}$$

Pour tout $X, X' \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda X + X') = \lambda f(X) + f(X')$.

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f \circ f(x, y) &= f(f(x, y)) \\ &= f(4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= (4(4x - 2y) - 2(6x - 3y), 6(4x - 2y) - 3(6x - 3y)) \\ &= (16x - 8y - 12x + 6y, 24x - 12y - 18x + 9y) \\ &= (4x - 2y, 6x - 3y) \\ &= f(x, y). \end{aligned}$$

Donc pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f \circ f(x, y) = f(x, y)$.

Conclusion : f est une projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im}(f) &= \text{Vect}(f(1, 0), f(0, 1)) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

Conclusion : f est une projection sur $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ parallèlement à

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 17. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est une symétrie et déterminer ses caractéristiques géométriques.

Correction.

$$\begin{aligned} f \text{ est une symétrie} &\iff f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \\ &\iff A \times A = I_3. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (9-4-4) & (12-4-8) & (12-8-4) \\ (-3+1+2) & (-4+1+4) & (-4+2+2) \\ (-3+2+1) & (-4+2+2) & (-4+4+1) \end{pmatrix} \\ &= I_3, \end{aligned}$$

Donc f est une symétrie.

Rappel cours : f est une symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3})$.

On note \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . Alors :

D'une part,

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2y - 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| (y, z) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\text{Ker}(f + \text{Id}_{\mathbb{R}^3}) &= \left\{ \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

Conclusion : f est la symétrie par rapport à $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
parallèlement à $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 18. On se place dans \mathbb{R}^3 muni de la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère le plan \mathcal{P} et la droite \mathcal{D} d'équations respectives :

$$\mathcal{P} : x + 2y - z = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D} : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que \mathcal{P} et \mathcal{D} sont supplémentaires. Trouver une base de \mathcal{P} et une base de \mathcal{D} . On note \mathcal{B}' la réunion de ces deux bases.
2. On note p la projection sur \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{D} . Déterminer la matrice de p dans la base \mathcal{B}' . En déduire la matrice de p dans la base canonique \mathcal{B} .
3. Faire de même avec la symétrie s par rapport à \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{D} .

Correction.

1.

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + 2y \end{pmatrix} \middle| (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).\end{aligned}$$

On note $(u, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$. (u, v) est une base de \mathcal{P} .

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \\ x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

On note $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (w) est une base de \mathcal{D} .

On note $\mathcal{B}' = (u, v, w)$.

\mathcal{B}' est une famille libre de vecteurs de \mathbb{R}^3 (le vérifier) et $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathbb{R}^3)$. \mathcal{B}' est donc une base de \mathbb{R}^3 .

En montrant que \mathcal{B}' , réunion d'une base de \mathcal{P} et d'une base de \mathcal{D} , est une base de \mathbb{R}^3 , on montre que \mathcal{P} et \mathcal{D} sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de \mathbb{R}^3 : $\mathcal{P} \oplus \mathcal{D} = \mathbb{R}^3$.

2. p est la projection sur \mathcal{P} parallèlement à \mathcal{D} .

Matrice de p dans la base \mathcal{B}' ?

Comme $u \in \mathcal{P}$, $p(u) = u = 1 \times u + 0 \times v + 0 \times w$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p(u)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $v \in \mathcal{P}$, $p(v) = v = 0 \times u + 1 \times v + 0 \times w$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p(v)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Comme $w \in \mathcal{D}$, $p(w) = 0 = 0 \times u + 0 \times v + 0 \times w$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p(w)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice de p dans la base \mathcal{B} ?

D'après la formule de changement de bases, on a

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) &= \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{Id}) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{Id}) \\ &= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(p) \times (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On sait que $s = 2p - \text{Id}$. Donc

$$\begin{aligned} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) &= 2\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) - \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$