Feuille d'exercices n°19
Probabilités

Équiprobabilité et variable aléatoire

Exercice 1. Une urne contient 5 boules indiscernables au toucher, 3 rouges et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules.

1. Calculer la probabilité des événements :
   - R : « les deux boules sont rouges »,
   - V : « les deux boules sont vertes ».
2. On appelle X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de boules vertes obtenues.
   - Déterminer la loi de probabilité de X.
   - Calculer $E(X)$.

Exercice 2. Un club de randonnée propose à ses adhérents une sortie payante suivant les tarifs indiqués ci-dessous :

Catégorie	A (Adultes)	J (Jeunes)	E (Enfants)
Sortie	20 euros	13 euros	7 euros
Repas	12 euros	7 euros	4 euros

Le club a inscrit 87 participants pour cette sortie dont 58 adultes et 12 enfants.

La moitié des adultes, un quart des enfants et 10 jeunes ont apporté leur propre pique-nique.

On choisit au hasard un participant. On note X la v.a. qui indique le prix payé au club par le participant pour cette sortie.

1. Faire un arbre d'effectifs suivant la catégorie du participant et suivant qu'il emporte ou non son propre pique-nique.
2. Quelles sont les valeurs possibles prises par X ?
3. (a) Dresser le tableau de la loi de probabilité de X.
   (b) Quel tarif moyen par adhérent peut fixer le club s'il renouvelle un grand nombre de fois ce type de sortie dans les mêmes conditions ?

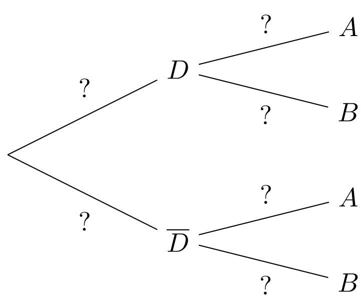
Indépendance et conditionnement

Exercice 3.

1. Soient A et B des événements tels que
$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{4} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{1}{10}.$$
Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
2. Soient A et B des événements tels que
$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3} \text{ et } P(A \cup B) = \frac{2}{3}.$$
Calculer $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
3. Soient A et B des événements tels que
$$P(A) = \frac{1}{3},\ P_A(B) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{2}.$$
Calculer $P(B)$.
4. Soient A et B des événements tels que
$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{3}{4} \text{ et } P(A \cap B) = \frac{2}{5}.$$
   - Calculer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.
   - Calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$. En déduire $P_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Exercice 4. Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2000 pièces, A en a produit 60% et B en a produit 40%. L'atelier A produit 4% de puces défectueuses et B en produit 3%. On prend une puce au hasard dans la commande. On appelle A l'événement « la puce provient de l'atelier A », B l'événement « elle provient de l'atelier B » et D l'événement « elle est défectueuse ».

1. Dresser un tableau ou un arbre d'effectifs qui décrit la composition de la commande.
2. Calculer les probabilités suivantes :
   (a) $P(D)$, $P(A \cap D)$ et $P_D(A)$,
   (b) $P(\overline{D})$, $P(\overline{D} \cap B)$ et $P_{\overline{D}}(B)$.
   (c) Compléter l'arbre suivant :



Exercice 5. Pierre et Paul jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée. Montrer que les événements suivants sont indépendants deux à deux, mais qu'ils ne sont pas mutuellement indépendants :

1. La pièce du premier joueur tombe sur pile.
2. La pièce du second joueur tombe sur face.
3. Les deux pièces tombent du même côté.

Exercice 6. Parmi les pilotes d'une compagnie aérienne particulièrement fiable, on compte 70% de myopes. On sait que 40% des myopes sont chauves, et 20% des pilotes qui ont une bonne vue sont chauves également. Quelle est la probabilité qu'un pilote chauve soit myope ?

Exercice 7. Un hôpital teste un médicament. 15% des patients ont contracté une maladie M et 8% des patients prennent un médicament test.

1. Quelle est la probabilité qu'un patient soit malade et prenne un médicament :
   (a) dans le cas où la prise de médicament et la contraction de la maladie sont des événements indépendants.
   (b) dans le cas où la probabilité de la contraction de la maladie est de 4% lorsque l'on a pris le médicament.
2. Quelle est la probabilité qu'un patient n'ait pas pris de médicament et ne soit pas malade ?

Exercice 8. On considère les deux premières questions, Q_1 et Q_2, d'un QCM. Les candidats ont le choix, pour chacune, entre quatre réponses dont une seule est correcte. On admet qu'un candidat, s'il ne connaît pas la bonne réponse, répond au hasard. Supposons que 3 candidats sur 4 ne sachent pas répondre à la question Q_1, que 2 candidats sur 3 ne sachent pas répondre à la question Q_2, et que la moitié des candidats ne sache répondre ni à Q_1, ni à Q_2.

1. Quelle est la probabilité qu'un candidat ayant bien répondu à la question Q_1 ait répondu au hasard ?
2. Quelle est la probabilité qu'un candidat choisi au hasard réponde correctement aux deux questions Q_1 et Q_2 ?
3. Quelle est la probabilité qu'un candidat ayant répondu correctement aux deux questions :
   (a) ait répondu au hasard pour les deux ?
   (b) ait répondu au hasard pour l'une des deux seulement ?
   (c) ait connu les deux bonnes réponses ?

Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Exercice 9. Soit $\Omega = [\![1, 10]\!]$ un espace d'issues muni de la probabilité uniforme P. On définit une variable aléatoire X en posant

$$\begin{array}{ll} X(\omega) = -1 & \text{si } 1 \leqslant \omega \leqslant 2, \\ X(\omega) = 0 & \text{si } 3 \leqslant \omega \leqslant 6, \\ X(\omega) = 1 & \text{si } 7 \leqslant \omega \leqslant 9, \\ X(\omega) = 2 & \text{si } \omega = 10. \end{array}$$

1. À quelles parties de Ω correspondent les événements

$$(X = -1), \quad (X = 0), \quad (X = 1), \quad (X = 2) \quad ?$$

2. Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer la loi de $|X|$.

Exercice 10. On lance six fois une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de « faces » obtenues.

1. Construire un espace de probabilité qui modélise cette expérience. Quel est le support de X ?
2. Soit A l'événement « la pièce est tombée sur face au troisième lancer et pile au cinquième. »
   (a) À combien d'événements élémentaires correspond A ?
   (b) Calculer la probabilité de A.
3. À combien de résultats élémentaires correspond l'événement $(X = 3)$? En déduire $P(X = 3)$.

Exercice 11. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On extrait au hasard et simultanément k boules $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Soit X la variable aléatoire qui représente le plus petit numéro des k boules extraites. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance dans les cas suivants :

1. $k = n$.
2. $k = n - 1$.
3. $k = 1$.

Exercice 12. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face : il existe un réel α tel que pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$, $P(X = k) = \alpha k$.

1. Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
2. On pose $Y = \frac{1}{X}$. Déterminer la loi de Y et calculer son espérance.
3. On pose $Z = X^2$. Déterminer la loi de Z et calculer son espérance.

Exercice 13. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, ayant même loi et donc même fonction de répartition F. On pose $Z = \max(X_1, X_2)$ et $T = \min(X_1, X_2)$.

Déterminer les fonctions de répartition F_Z et F_T des variables aléatoires réelles Z et T.

Lois usuelles

Exercice 14. Lorsqu'il se rend au lycée, Pierre passe toujours à la patisserie. Trois fois sur quatre, il achète un croissant pour 1€, et le reste du temps, il achète un éclair pour 2€. On note X la variable aléatoire égale à la somme dépensée en 20 jours.

1. Déterminer le support de X.
2. On note Y la variable aléatoire égale au nombre d'éclairs achetés par Pierre en 20 jours. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
3. En déduire la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 15. Pierre tire au hasard et avec remise 3 cartes d'un jeu de 52 cartes. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'as obtenus. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.

Exercice 16. A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si moins de la moitié des moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? On discutera en fonction de p.

Exercice 17. L'usine d'un village pollue l'eau de chacune de ses habitations avec une probabilité p ($0 < p < 1$). Le maire décide de tester chacune de ses 100 arrivées d'eau. Comme le village est découpé en 10 quartiers Q_i, $i \in [\![1, 10]\!]$, chacun des quartiers étant composé de 10 habitations, il fait effectuer des prélévements quartier par quartier. Il teste chacun des 10 mélanges obtenus.
- Si le mélange d'un quartier Q_i est positif, il fait alors tester à nouveau chaque habitation de ce quartier ;
- sinon, il considère que l'eau du quartier Q_i est saine.
On note T la variable aléatoire égale au nombre total de test effectués, et X la variable aléatoire égale au nombre de quartiers dont le test est positif.

1. Montrer que $T = 10X + 10$.
2. Déterminer la loi de X, sa moyenne et sa variance.
3. Déterminer en fonction de p s'il est plus avantageux de tester chacune des 100 habitations plutôt que d'utiliser le protocole du maire.

Exercice 18. Pierre et Paul jouent à pile ou face avec une pièce équilibrée. Chacun lance la pièce n fois.

1. Quelle est la probabilité que Pierre sorte pile k fois exactement ?
2. Quelle est la probabilité qu'ils arrivent ex aequo ?
3. Quelle est la probabilité que Paul gagne la partie ?

Indication : On rappelle la formule de Vandermonde :

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Exercice 19. Claude joue 10 fois à pile ou face avec une pièce truquée. La probabilité pour la pièce de tomber sur « pile » est p, $0 < p < 1$.

1. Quelle est la probabilité que la pièce tombe sur pile au premier et au dixième lancer ? (On ne se préoccupe pas du résultat des autres lancers).
2. Sachant que la pièce est tombée 3 fois sur pile, quelle est la probabilité qu'elle soit tombée sur pile au premier lancer ?

Exercice 20. On jette 3600 fois un dé équilibré. Minorer la probabilité de l'événement « le nombre d'apparitions du numéro 1 est compris entre 480 et 720 ».
Indication : Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Exercice 21. Une urne contient b boules blanches et b boules rouges ($b \in \mathbb{N}^\star$). On y effectue une suite de tirages de la façon suivante : on replace dans l'urne chaque boule obtenue en rajoutant b boules de la même couleur.
Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$

Exercice 22. Une entreprise pharmaceutique décide de faire des économies sur les tarifs d'affranchissements des courriers publicitaires à envoyer aux clients. Pour cela, elle décide d'affranchir, au hasard, une proportion de 3 lettres sur 5 au tarif urgent, les autres au tarif normal.

1. Quatre lettres sont envoyées dans un cabinet médical de quatre médecins : quelle est la probabilité des événements :
   A : «Au moins l'un d'entre eux reçoit une lettre au tarif urgent».
   B : «Exactement 2 médecins sur les quatre reçoivent une lettre au tarif urgent».
2. Soit X la variable aléatoire : «nombre de lettres affranchies au tarif urgent parmi 10 lettres». Quelle est la loi de probabilité de X, quelle est son espérance, quelle est sa variance ?

Exercice 23. On prend au hasard, en même temps, trois ampoules dans un lot de 15 dont 5 sont défectueuses. Calculer la probabilité des événements :
A : « au moins une ampoule est défectueuse »,
B : « les 3 ampoules sont défectueuses »,
C : « exactement une ampoule est défectueuse ».

Exercice 24. Un avion peut accueillir 20 personnes. Des statistiques montrent que 25% clients ayant réservé ne viennent pas. Soit X la variable aléatoire : «nombre de clients qui viennent après réservation parmi 20». Quelle est la loi de X ? (on ne donnera que la forme générale) Quelle est son espérance, son écart-type ? Quelle est la probabilité pour que X soit égal à 15 ?

Exercice 25. L'oral d'un concours comporte au total 100 sujets. Les candidats tirent au sort trois sujets et choisissent alors le sujet traité parmi ces trois sujets. Un candidat se présente en ayant révisé 60 sujets sur les 100. Quelle est la probabilité pour que le candidat ait révisé :

1. les trois sujets tirés ;
2. exactement deux sujets sur les trois sujets ;
3. aucun des trois sujets.

Exercice 26. Un candidat se présente à un concours où, cette fois, les 20 questions sont données sous forme de QCM. À chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-la, définir une variable aléatoire associée à ce problème et donner sa loi de probabilité, son espérance.

Exercice 27. Dans une population, des statistiques montrent qu'une personne sur cent est centenaire. Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 100 personnes choisies au hasard ? Et parmi 200 personnes ?

Exercice 28. Un industriel doit vérifier l'état de marche de ses machines et en remplacer certaines le cas échéant. D'après des statistiques précédentes, il évalue à 30% la probabilité pour une machine de tomber en panne en 5 ans. Parmi ces dernières, la probabilité de devenir hors d'usage suite à une panne plus grave est évaluée à 75%. Cette probabilité est de 40% pour une machine n'ayant jamais eu de panne.

1. Quelle est la probabilité pour une machine donnée de plus de cinq ans d'être hors d'usage ?
2. Quelle est la probabilité pour une machine hors d'usage de n'avoir jamais eu de panne auparavant ?
3. Soit X la variable aléatoire «nombre de machines qui tombent en panne au bout de 5 ans, parmi 10 machines choisies au hasard».
   Quelle est la loi de probabilité de X (on donnera le type de loi et les formules de calcul), son espérance, sa variance et son écart-type ?
4. Calculer $P(X = 5)$.