Feuille d'exercices n°5 – Correction

Les nombres complexes

Exercice 1. Écrire sous forme algébrique les nombres suivants :

1. $z_1 = (3-2i) - (1+i)$
2. $z_2 = 2i(1-i)$
3. $z_3 = (2+i)(5-4i)$
4. $z_4 = (1-2i)^5$
5. $z_5 = \dfrac{4+3i}{1+2i}$
6. $z_6 = \dfrac{(2+i)^3}{(1+2i)^2}$
7. $z_7 = \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$
8. $z_8 = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$
9. $z_9 = (1+i)^{2020}$

1. $z_1 = 2-3i$
2. $z_2 = 2+2i$
3. $z_3 = 14-3i$
4. $z_4 = 41+38i$
5. $z_5 = 2-i$
6. $z_6 = \dfrac{38}{25} - \dfrac{41}{25}i$
7. $z_7 = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$
8. $z_8 = \sqrt{3} - i$
9. $z_9 = -2^{1010}$

Exercice 2. Écrire sous forme exponentielle les nombres suivants :

1. $z_1 = i$
2. $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
3. $z_3 = 2 + 2i\sqrt{3}$
4. $z_4 = (-1-i)i$
5. $z_5 = \dfrac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{1 - i\sqrt{3}}$
6. $z_6 = (-3-3i)^5$
7. $z_7 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$
8. $z_8 = \sin\frac{\pi}{6} - i\cos\frac{\pi}{6}$
9. $z_9 = \sin\frac{\pi}{8} + i\cos\frac{\pi}{8}$

1. $z_1 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$
2. $z_2 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$
3. $z_3 = 4\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$
4. $z_4 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$
5. $z_5 = \dfrac{2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}} = \mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$
6. $z_6 = (3\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}})^5 = 3^5 \times \sqrt{2}^5\mathrm{e}^{-i\frac{15\pi}{4}}$
7. $z_7 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$
8. $z_8 = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$
9. $z_9 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} = \mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{8}}$

Exercice 3.

1. Écrire sous forme exponentielle les complexes suivants :

$$z_1 = -1-i \qquad z_2 = 1-\sqrt{3}i \qquad z_3 = z_1 \times z_2.$$

$z_1 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}$, $z_2 = 2\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{13\pi}{12}}$.

2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

D'une part,

$$\begin{aligned} z_3 &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\tfrac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\tfrac{13\pi}{12}\right)\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\tfrac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\tfrac{13\pi}{12}\right)\right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \times z_2 \\ &= (-1-i)\times(1-\sqrt{2}i) \\ &= \left(-1-\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}-1\right)i. \end{aligned}$$

On a donc

$$2\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+2\sqrt{2}\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)i=\left(-1-\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i$$
$$\iff \begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) & =-1-\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) & =\sqrt{3}-1 \end{cases}$$
$$\iff \boxed{\begin{cases} \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) & =\frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) & =\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}.}$$

Exercice 4. 1. Déterminer la forme trigonométrique du complexe $z=1+i\sqrt{3}$.

$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel positif.

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right)^n &= z^n \\ &= 2^n\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)^n \\ &= 2^n\left(\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)\end{aligned}$$

d'après la formule de Moivre.

z^n est un réel positif si et seulement si $\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)\geqslant 0$ et $\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)=0$, si et seulement si n est un multiple de 6.

Exercice 5. Soit $z\in\mathbb{C}$.

1. Montrer que $|z-i|=|z+i|$ si et seulement si z est réel.
2. Montrer que $|z-1|=|iz+i|$ si et seulement si z est un imaginaire pur.

Rappel : $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ et $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2i}$.

1.

$$\begin{aligned}|z-i|=|z+i| &\iff (z-i)\overline{(z-i)}=(z+i)\overline{(z+i)} \\ &\iff (z-i)(\bar{z}-\bar{i})=(z+i)(\bar{z}+\bar{i}) \\ &\iff (z-i)(\bar{z}+i)=(z+i)(\bar{z}-i) \\ &\iff \cancel{z\bar{z}}+iz-i\bar{z}-\cancel{i^2}=\cancel{z\bar{z}}-iz+i\bar{z}-\cancel{i^2} \\ &\iff 2i(z-\bar{z})=0 \\ &\iff z-\bar{z}=0 \\ &\iff 2i\mathrm{Im}(z)=0 \\ &\iff \mathrm{Im}(z)=0 \\ &\iff z \text{ est réel.}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}|z-1|=|iz+i| &\iff |z-1|=|i(z+1)| \\ &\iff |z-1|=|i|\,|z+1| \\ &\iff (z-1)\overline{(z-1)}=(z+1)\overline{(z+1)} \\ &\iff (z-1)(\bar{z}-\bar{1})=(z+1)(\bar{z}+\bar{1}) \\ &\iff (z-1)(\bar{z}-1)=(z+1)(\bar{z}+1) \\ &\iff \cancel{z\bar{z}}-z-\bar{z}+\cancel{1}=\cancel{z\bar{z}}+z+\bar{z}+\cancel{1} \\ &\iff 0=2(z+\bar{z}) \\ &\iff 0=4\mathrm{Re}(z) \\ &\iff z \text{ est un imaginaire pur.}\end{aligned}$$

Exercice 6. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ vérifiant $(c,d)\neq(0,0)$ pour que $\dfrac{a+ib}{c+id}$ soit réel.

Commençons par déterminer la forme algébrique du complexe $\dfrac{a+ib}{c+id}$:

$$\begin{aligned}
\frac{a+ib}{c+id} &= \frac{a+ib}{c+id} \times \frac{c-id}{c-id} \\
&= \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} \\
&= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{a+ib}{c+id} \text{ est réel} &\iff \frac{bc-ad}{c^2+d^2} = 0 \\
&\iff bc-ad = 0.
\end{aligned}$$

Exercice 7. 1. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\cos^4(x)$ (b) $\sin^3(x)$

(c) $\cos(x)\sin^2(x)$ (d) $\cos^2(x)\sin^3(x)$

2. Factoriser les expressions suivantes :

(a) $\cos(2x)$

(b) $\cos(x) + 2\cos(2x) + \cos(3x)$

(c) $\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x)$

1.

(a)

$$\begin{aligned}
\cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{1}{2^4}\left(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}\right) \\
&= \frac{1}{2^4}\left(2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}.}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x}\right) \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{i3x} - e^{-i3x} - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right) \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left(2i\sin(3x) - 3 \times 2i\sin(x)\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x).}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\cos(x)\sin^2(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{1}{-8}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)\left(e^{i2x}-2+e^{-i2x}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i3x}-2e^{ix}+e^{-ix}+e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-i3x}\right) \\
&= -\frac{1}{8}\left(e^{i3x}+e^{-i3x}-(e^{ix}+e^{-ix})\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{1}{4}\cos(x).}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\cos^2(x)\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{i2x}+2+e^{-i2x}\right)\left(e^{i3x}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-i3x}\right) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}(e^{i5x}-3e^{i3x}+3e^{ix}-e^{-ix}+ \\
&\qquad 2e^{i3x}-6e^{ix}+6e^{-ix}-2e^{-i3x}+ \\
&\qquad e^{ix}-3e^{-ix}+3e^{-i3x}-e^{-i5x}) \\
&= -\frac{1}{2^5 i}\left(e^{i5x}-e^{-i5x}-(e^{i3x}-e^{-i3x})-2(e^{ix}-e^{-ix})\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{16}\sin(5x)+\frac{1}{16}\sin(3x)+\frac{1}{8}\sin(x).}
\end{aligned}$$

2.

(a)

$$\begin{aligned}
\cos(2x) &= \mathrm{Re}\left[e^{i2x}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[(e^{ix})^2\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[(\cos(x)+i\sin(x))^2\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[\cos^2(x)+i\times 2\cos(x)\sin(x)-\sin^2(x)\right] \\
&= \boxed{\cos^2(x)-\sin^2(x).}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos(3x) &= \mathrm{Re}\left[e^{i3x}\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[(e^{ix})^3\right] \\
&= \mathrm{Re}\left[(\cos(x)+i\sin(x))^3\right] \\
&= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\cos(x)+2\cos(2x)+\cos(3x) \\
&= \cos(x)+2(\cos^2(x)-\sin^2(x))+\cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) \\
&= \cos(x)+2(2\cos^2(x)-1)+\cos^3(x)-3\cos(x)\left(1-\cos^2(x)\right) \\
&\qquad \textit{en remplaçant } \sin^2(x) \textit{ par } 1-\cos^2(x) \\
&= 4\cos^3(x)+4\cos^2(x)-2\cos(x)-2
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sin(3x) &= \mathrm{Im}\left[(\cos(x)+i\sin(x))^3\right] \\
&= 3\cos^2(x)\sin(x)-\sin^3(x)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sin(5x) &= \operatorname{Im}\left[(\cos(x)+i\sin(x))^5\right]\\ &= 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x).\end{aligned}$$

Exercice 8. Soient p et q deux nombres réels.

1. Factoriser l'expression $\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}$ par $\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}$.
2. En déduire une factorisation de $\cos(p)+\cos(q)$.
3. Résoudre l'équation $\cos(x)+\cos(3x) \geqslant 0$ d'inconnue $x \in]-\pi,\pi]$.

1.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq} &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \times \frac{\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}}\\ &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \times \left(\frac{\mathrm{e}^{ip}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}}+\frac{\mathrm{e}^{iq}}{\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \times \left(\mathrm{e}^{i\frac{p-q}{2}}+\mathrm{e}^{-i\frac{p-q}{2}}\right)\\ &= \mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}} \times 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq} = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}.}$$

2. On déduit de ce qui précède

$$\operatorname{Re}\left[\mathrm{e}^{ip}+\mathrm{e}^{iq}\right] = \operatorname{Re}\left[2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\mathrm{e}^{i\frac{p+q}{2}}\right],$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\cos(p)+\cos(q) = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)\geqslant 0 &\iff 2\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\geqslant 0\\ &\iff \cos(-x)\cos(2x)\geqslant 0\\ &\iff \cos(x)\cos(2x)\geqslant 0\end{aligned}$$

Exercice 9. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(3+5i)z = 1-z$
2. $\dfrac{1}{z+i} = 3+i$
3. $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
4. $i\overline{z} = 1-i$
5. $(i\overline{z}+1)(z+3i) = 0$
6. $\dfrac{1+2iz}{1+2z} = i\dfrac{z-1}{z+3}$

1. $\mathscr{S} = \left\{\frac{4}{41}-\frac{5}{41}i\right\}$
2. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{10}-\frac{11}{10}i\right\}$
3. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right\}$
4. $\mathscr{S} = \{-1+i\}$
5. $\mathscr{S} = \{-i,-3i\}$
6. $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right\}$

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $2z^2-6z+5=0$
2. $z^2+z+1=0$
3. $z^2=z+1$
4. $z^2-(1+2i)z+i-1=0$
5. $z^2-\sqrt{3}z-i=0$
6. $z^2-(3+4i)z-1+5i=0$
7. $z^4+z^2+1=0$
8. $z^3+2z^2+2z+1=0$

1. $\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i \ ; \ \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$
2. $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$
3. $\mathscr{S} = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \ ; \ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
4. $\mathscr{S} = \{1+i \ ; \ i\}$
5. $\mathscr{S} = \left\{\frac{\sqrt{3}-2}{2} - \frac{1}{2}i \ ; \ \frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{1}{2}i\right\}$
6. $\mathscr{S} = \{2+3i \ ; \ 1+i\}$
7. $\mathscr{S} = \left\{-\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \ ; \ \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \ ; \ -\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} \ ; \ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right\}$
8. $\mathscr{S} = \left\{-1 \ ; \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \ ; \ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

Exercice 11.
1. Représenter les racines sixièmes de l'unité et les racines quatrièmes de -1.
2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0.$$

1. Les racines sixièmes de l'unité sont $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{6}}$ avec $k \in [\![0,5]\!]$. (à représenter)
   Les racines quatrièmes de -1 sont $\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right)}$ avec $k \in [\![0,4]\!]$. (à représenter)
2.

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} = 0 &\iff \frac{1-z^n}{1-z} = 0 \ (z \neq 1) \\ &\iff 1 - z^n = 0 \\ &\iff z^n = 1 \\ &\iff z = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k \in [\![1, n-1]\!]. \end{aligned}$$

Conclusion : $\mathscr{S} = \mathbb{U}_n \setminus \{1\} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}, \ k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$.

Exercice 12.
1. Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

(a) $z_1 = 9$ (b) $z_2 = -9$ (c) $z_3 = i$
(d) $z_4 = 3+4i$ (e) $z_5 = 5+12i$ (f) $z_6 = 9-40i$

2. Déterminer les racines cubiques de $-2+2i$.
3. Déterminer les racines cinquièmes de $-i$.
4. Déterminer les racines sixièmes de $2\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1.
   (a) Les racines carrées de 9 sont -3 et 3.
   (b) Les racines carrées de -9 sont $-3i$ et $3i$.
   (c) Les racines carrées de i sont $-\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et $\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.
   (d) On recherche les racines carrées de $3+4i$ sont la forme $z = x + iy$:
   $$\begin{cases} x^2 + y^2 = |3+4i| & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \\ 2xy = 4 & (3) \end{cases}$$
   Les racines carrées de $3+4i$ sont $2+i$ et $-2-i$.
   (e) Les racines carrées de $5+12i$ sont $3+2i$ et $-3-2i$.
   (f) Les racines carrées de $9-40i$ sont $5-4i$ et $-5+4i$.
2. Les racines cubiques de $-2+2i$ sont $\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in [\![0,2]\!]$.
3. Les racines cinquièmes de $-i$ sont $\mathrm{e}^{i\left(-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\right)}$ avec $k \in [\![0,4]\!]$.
4. Les racines sixièmes de $2\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}$ sont $2^{\frac{1}{6}}\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{3}\right)}$ avec $k \in [\![0,5]\!]$.

Exercice 13. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^3 - 1 = 0$ 2. $z^4 = i$ 3. $z^{10} = \sqrt{3} + i$

1. $\mathscr{S} = \left\{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{3}}, \ k \in [\![0,2]\!]\right\}$

2. $\mathscr{S} = \left\{ e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)},\ k \in [\![0,3]\!] \right\}$

3. $\mathscr{S} = \left\{ 2^{\frac{1}{10}} e^{i\left(\frac{\pi}{60}+\frac{k\pi}{5}\right)},\ k \in [\![0,9]\!] \right\}$

Exercice 14. Soit $n \geqslant 2$ un entier.

Résoudre l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
z^{2n} - z^n + 1 - i = 0 &\iff Z^2 - Z + 1 - i = 0 \text{ en posant } Z = z^n \\
&(\Delta = -3 + 4i,\ \delta = 1 + 2i) \\
&\iff Z = 1 + i \text{ ou } Z = -i \\
&\iff z^n = 1 + i \text{ ou } z^n = -i \\
&\iff z^n = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ ou } z^n = e^{-i\frac{\pi}{2}} \\
&\iff z = 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ ou } z = e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].
\end{aligned}$$

Conclusion : $\mathscr{S} = \left\{ 2^{\frac{1}{2n}} e^{i\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}, e^{i\left(-\frac{\pi}{2n}+\frac{2k\pi}{n}\right)} \mid k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$.

Exercice 15. On pose $u = e^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{7}}$. Calculer

$$\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6}.$$

u est une racine septième de l'unité : $u^7 = 1$. De plus, $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = 0$.

$$\begin{aligned}
&\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6} \\
&= \frac{u(1+u^4)(1+u^6) + u^2(1+u^2)(1+u^6) + u^3(1+u^2)(1+u^4)}{(1+u^2)(1+u^4)(1+u^6)} \\
&= \frac{u + u^5 + u^7 + u^{11} + u^2 + u^4 + u^8 + u^{10} + u^3 + u^5 + u^7 + u^9}{1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^6 + u^8 + u^{10} + u^{12}} \\
&= \frac{u + u^5 + 1 + u^4 + u^2 + u^4 + u + u^3 + u^3 + u^5 + 1 + u^2}{1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^6 + u + u^3 + u^5} \\
&= \frac{2(1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5)}{1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^6} \\
&= \frac{2 \times (-u^6)}{0 + u^6} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Conclusion :

$$\frac{u}{1+u^2} + \frac{u^2}{1+u^4} + \frac{u^3}{1+u^6} = -2.$$

Exercice 16. 1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les sommes suivantes :

(a) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ (b) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculer la somme et le produit des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \sum_{k=0}^{n} \text{Re}\left[e^{ik\theta}\right] = \text{Re}\left[\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right]$ et

$$S_2=\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)=\operatorname{Im}\left[\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}\right].$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{ik\theta}&=\sum_{k=0}^{n}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)^k\\
&=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{i\theta}-1} & \text{si } \mathrm{e}^{i\theta}\neq 1\\ n+1 & \text{si } \mathrm{e}^{i\theta}=1\end{cases}\\
&=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{2}}}\dfrac{\cancel{2i}\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{si } \theta\neq 0[2\pi]\\ n+1 & \text{si } \theta=0[2\pi]\end{cases}\\
&=\begin{cases}\mathrm{e}^{i\frac{n\theta}{2}}\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{si } \theta\neq 0[2\pi]\\ n+1 & \text{si } \theta=0[2\pi]\end{cases}.
\end{aligned}$$

<u>Conclusion</u> : Si $\theta\neq 0[2\pi]$,

$$S_1=\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\quad\text{et}\quad S_2=\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Si $\theta=0[2\pi]$,

$$S_1=n+1\quad\text{et}\quad S_2=0.$$

2. Rappel : $\mathbb{U}_n=\left\{\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\mid k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$. On note P (resp. S) le produit (resp. la somme) des racines n-ièmes .

$$\begin{aligned}
P&=\prod_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}\\
&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\\
&=\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\sum_{k=0}^{n-1}k}\\
&=\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}\\
&=\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}\times n}\right)^{\frac{n-1}{2}}\\
&=1^{\frac{n-1}{2}}\\
&=\boxed{1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
S&=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k\\
&=\frac{\left(\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n-1}{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}-1}\\
&=\frac{\mathrm{e}^{i2\pi}-1}{\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}}-1}\\
&=\boxed{0}.
\end{aligned}$$

Exercice 17. Soient $A(1,1)$ et $B(-1,2)$ deux points du plan.

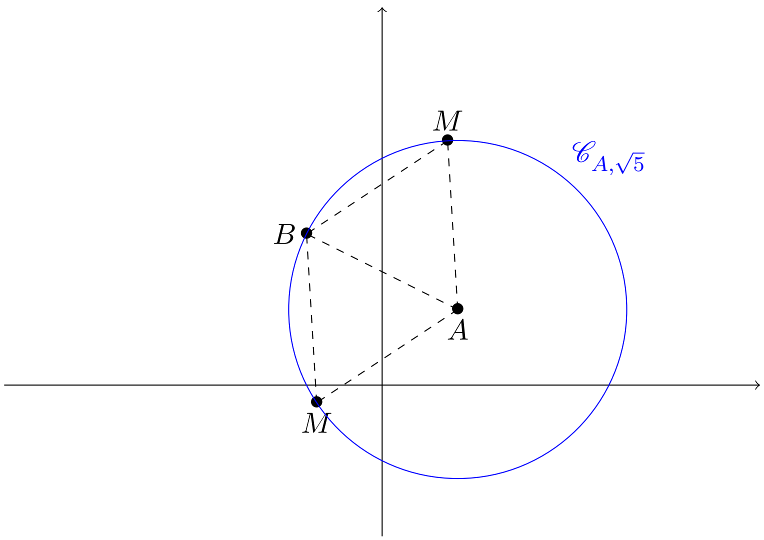
1. Déterminer les points M du plan tels que ABM soit un triangle équilatéral.
2. Déterminer les points M du plan tels que ABM soit un triangle

rectangle isocèle en A.

1. A est le point d'affixe $z_A = 1+i$ et B, celui d'affixe $z_B = -1+2i$.
   Soit M un point du plan d'affixe z.

$$\begin{aligned}
ABM \text{ équilatéral } &\iff AM = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \pm\frac{\pi}{3}[2\pi] \\
&\iff z - z_A = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{3}}(z_B - z_A) \\
&\iff z = z_A + \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B - z_A) \\
&\iff z = 1 + i + \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2+i) \\
&\iff z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3}\right) \text{ ou } z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)
\end{aligned}$$

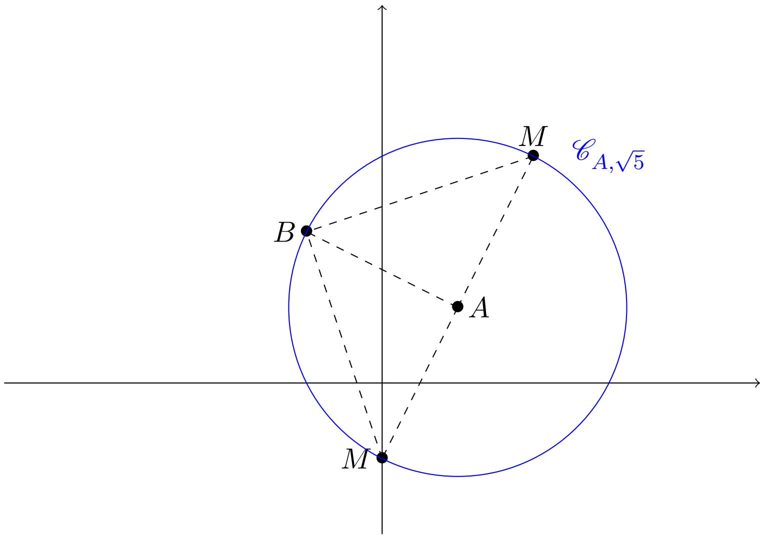
Conclusion : Le triangle ABM est équilatéral si et seulement si M a pour coordonnées $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} - \sqrt{3}\right)$ ou $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$.



2.

$$\begin{aligned}
ABM \text{ rectangle isocèle en } A &\iff AM = AB \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \pm\frac{\pi}{2}[2\pi] \\
&\iff z - z_A = \mathrm{e}^{\pm i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_A) \\
&\iff z = z_A \pm i(z_B - z_A) \\
&\iff z = 1 + i \pm i(-2+i) \\
&\iff z = -i \text{ ou } z = 2 + 3i.
\end{aligned}$$

Conclusion : Le triangle ABM est rectangle isocèle en A si et seulement si M a pour coordonnées $(0, -1)$ ou $(2, 3)$.



Exercice 18. Déterminer et représenter l'ensemble points M d'affixe z tels que :

1. $|z - 2i| = 3$
2. $|z + 3 + i| \leqslant 2$
3. $\arg(z - i) = \dfrac{\pi}{6}$
4. $\dfrac{|z-3|}{|z-5|} = 1$

Exercice 19. Déterminer l'expression des transformations suivantes :

1. f_1 la translation de vecteur $\vec{V}$ d'affixe $2-3i$.
   $z' = z + 2 - 3i$.
2. f_2 la rotation de centre A d'affixe $1+i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   $z' - (1+i) = e^{i\frac{\pi}{2}}\left(z - (1+i)\right)$, c'est-à-dire $z' = iz + 2$.
3. f_3 l'homothétie de centre A d'affixe $1+i$ et de rapport $\sqrt{2}$.
   $z' - (1+i) = \sqrt{2}(z - (1+i))$, c'est-à-dire $z' = \sqrt{2}z + (1-\sqrt{2})(1+i)$.

Exercice 20. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation f dans les cas suivants :

1. $f(z) = z - 1 - i$
2. $f(z) = \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $f(z) = \sqrt{3}z$
4. $f(z) = iz - 3i + 3$

1. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = z - 1 - i$.
   f n'admet pas de point fixe. Il s'agit de la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe $-1-i$.
2. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Recherche point fixe :
   $$\begin{aligned} z = \frac{1}{2}z - i\frac{\sqrt{3}}{2} &\iff \frac{1}{2}z = -i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff z = -i\sqrt{3}. \end{aligned}$$
   f est l'homothétie de centre $A(-i\sqrt{3})$ et de rapport $\lambda = \frac{1}{2}$:
   $$z' - (-i\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(z - (-i\sqrt{3})\right).$$
3. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = \sqrt{3}z$.
   f est l'homothétie de centre $O(0)$ et de rapport $\lambda = \sqrt{3}$.
4. On étudie la transformation f qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' avec $z' = iz - 3i + 3$.
   Recherche point fixe :
   $$\begin{aligned} z = iz - 3i + 3 &\iff (1-i)z = 3(1-i) \\ &\iff z = 3. \end{aligned}$$
   f est la rotation de centre A d'affixe 3 et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$:
   $$z' - 3 = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-3).$$