

Feuille d'exercices n°6

Les systèmes linéaires

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (c) \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5y - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + 2z = 1 \\ -y + z = 2 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

2. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$:

$$(a) \begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ 3x - y + 2z + t = 1 \\ 4x - y + z + 2t = 4 \\ 6x - y + z - t = 0 \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + 3y + 3t = 3 \\ 3x - y - t = 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases} .$$

Interpréter géométriquement le résultat.

2. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases} .$$

Exercice 3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre les systèmes paramétrés suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$1. \begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 4z = a \end{cases} \quad 3. \begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = a \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x + y + z = a \\ x - 2y - z = b \\ -x + 11y + 7z = 0 \end{cases}$$

Exercice 4. Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions du système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1 \end{cases} .$$

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 2 tels que $P(1) = 1$, $P'(1) = 1$ et $P(-1) = 0$.

2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 3 tels que $P(-1) = 1$, $P(1) = 0$ et $P(2) = 1$.

Exercice 6. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$:

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 = 1 \\ x^4y^5z^{12} = 2 \\ x^2y^2z^5 = 3 \end{cases} .$$