Feuille d'exercices n°6 – Correction
Les systèmes linéaires

Exercice 1. 1. Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

(a) $\begin{cases} x+y+2z = 3 \\ x+2y+z = 1 \\ 2x+y+z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+2z = 1 \\ -y+z = 2 \\ x-2y = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+2y-3z = 4 \\ x+3y-z = 11 \\ 2x+5y-5z = 13 \\ x+4y+z = 18 \end{cases}$

2. Résoudre les sytèmes suivants d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{C}^4$:

(a) $\begin{cases} 2x-y+z+t = 0 \\ 3x-y+2z+t = 1 \\ 4x-y+z+2t = 4 \\ 6x-y+z-t = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x+y+z-3t = 1 \\ 2x+y-z+t = -1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+3y+3t = 3 \\ 3x-y-t = 1 \end{cases}$

Correction.

1. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & -6 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right)$$

$$(a) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 3-y-2z \\ \boxed{y} = -2+z \\ \boxed{z} = 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = -1 \\ \boxed{y} = 0 \\ \boxed{z} = 2 \end{cases}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (a) est $\{(-1, 0, 2)\}$.

(b)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 1 & -2 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & | & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 1 - 2z \\ \boxed{y} = -2 + z \\ \boxed{z} = 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = -1 \\ \boxed{y} = -1 \\ \boxed{z} = 1 \end{cases} .$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (b) est $\{(-1, -1, 1)\}$.

(c)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & | & 4 \\ 1 & 3 & -1 & | & 11 \\ 2 & 5 & -5 & | & 13 \\ 1 & 4 & 1 & | & 18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & 1 & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 2 & 4 & | & 14 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & | & 7 \\ 0 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & 2 & | & 7 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & | & 7 \\ 0 & 0 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -3 & | & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & | & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$(c) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 4 - 2y + 3z \\ \boxed{y} = 7 - 2z \\ \boxed{z} = 2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = 4 \\ \boxed{y} = 3 \\ \boxed{z} = 2 \\ 0 = 0 \end{cases} .$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (c) est $\{(4, 3, 2)\}$.

2. (a)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 4 \\ 8 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 5 \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(a) \iff \begin{cases} \boxed{x} = 1 \\ \boxed{y} = 5 - x \\ \boxed{z} = 1 - x \\ \boxed{t} = -2x + y - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = 1 \\ \boxed{y} = 4 \\ \boxed{z} = 0 \\ \boxed{t} = 2 \end{cases}.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (a) est $\{(1,4,0,2)\}$.

(b)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -7 & 3 \end{array}\right)$$

$$(b) \iff \begin{cases} \boxed{x} = -2 + 2z - 4t \\ \boxed{y} = 3 - 3z + 7t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, \quad (z,t) \in \mathbb{C}^2.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (b) est

$$\left\{ (-2 + 2z - 4t, 3 - 3z + 7t, z, t) \middle| (z,t) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

(c)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & -10 & 0 & -10 & -8 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & \frac{4}{5} \end{array}\right)$$

$$(c) \iff \begin{cases} \boxed{x} = \frac{3}{5} \\ \boxed{y} = \frac{4}{5} - t \\ z = z \\ t = t \end{cases}, \quad (z,t) \in \mathbb{C}^2.$$

Conclusion : L'ensemble des solutions du système (b) est

$$\left\{ \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} - t, z, t \right) \middle| (z,t) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$.

1. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(S)\begin{cases} x + my = -3 \\ mx + 4y = 6 \end{cases}.$$

   Interpréter géométriquement le résultat.

2. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ x - 2y + 2z = m \\ x + y - z = 1 \end{cases}.$$

Correction.

1. On note (S) le système considéré et $\mathscr{S}$ son ensemble de solutions.

$$\det(S) = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 4 \end{vmatrix} = 4 - m^2 = (2-m)(2+m)$$

Si $m = 2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + 2y = -3 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} + 2y = -3 \\ 0 = 12 \end{cases}$$

et $\mathscr{S} = \emptyset$.

Si $m = -2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} - 2y = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

et $\mathscr{S} = \{\,(2y-3, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Si $m \neq -2$ et $m \neq 2$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + my = -3 \\ (4-m^2)\boxed{y} = 6 + 3m \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = -3 - my \\ \boxed{y} = \dfrac{3}{2-m} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = -\frac{6}{2-m} \\ \boxed{y} = \dfrac{3}{2-m} \end{cases}$$

et $\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{6}{2-m}, \frac{3}{2-m}\right)\right\}$.

Conclusion :

- Si $m = 2$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$.
  (intersection de deux droites parallèles et distinctes du plan)
- Si $m \neq -2$, alors $\mathscr{S} = \{\,(2y-3, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.
  (intersection de deux droites parallèles et confondues du plan)
- Si $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, alors $\mathscr{S} = \left\{\left(-\frac{6}{2-m}, \frac{3}{2-m}\right)\right\}$.
  (intersection de deux droites non parallèles du plan)

2. On note (S) le système considéré et $\mathscr{S}$ son ensemble de solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & m \\ 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & m-1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1-m}{3} \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & \frac{1-m}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m+2}{3} \end{array}\right)$$

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + y - z = 1 \\ \boxed{y} - z = \frac{1-m}{3} \\ 0 = m+2 \end{cases} .$$

Conclusion :

— Si $m \neq -2$, $\mathscr{S} = \emptyset$.

— Si $m = -2$, $\mathscr{S} = \{(0, 1+z, z) | \, z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Résoudre les systèmes paramétrés suivants d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

1. $\begin{cases} x+3y+z &= 1 \\ 2x-y+3z &= 0 \\ 3x+2y+4z &= a \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+z &= a \\ x-2y-z &= b \\ -x+11y+7z &= 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= a \\ x+y+az &= 0 \end{cases}$

Correction.

1. On note (S) le système considéré et $\mathscr{S}$ son ensemble de solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 1 & a-3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 10 & 0 & 3 \\ 0 & -7 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

Conclusion :

— Si $a \neq 1$, $\mathscr{S} = \emptyset$.

— Si $a = 1$, $\mathscr{S} = \{(3-10y, y, -2+7y) | \, y \in \mathbb{R}\}$.

2. On note (S) le système considéré et $\mathscr{S}$ son ensemble de solutions.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -2 & -1 & b \\ -1 & 11 & 7 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & -3 & -2 & b-a \\ 0 & 12 & 8 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & a \\ 0 & \boxed{3} & 2 & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 4b-3a \end{array}\right)$$

Conclusion :

— Si $4b-3a \neq 0$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$.

— Si $b = \frac{3a}{4}$, alors $\mathscr{S} \left\{ \left(\frac{11a}{12} - \frac{1}{3}z, \frac{a}{12} - \frac{2}{3}z, z\right) \middle| \, z \in \mathbb{R} \right\}$.

3. On note (S) le système considéré et $\mathscr{S}$ son ensemble de solutions.

$$\det(S) = (a+2)(a-1)^2$$

Si $a = 1$, alors

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z &= 1 \\ x+y+z &= 1 \\ x+y+z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + z &= 1 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= -1 \end{cases}$$

et $\mathscr{S} = \emptyset$.

Si $a \neq -2$, alors

$$\begin{cases} -2x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= -2 \\ x+y-2z &= 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_1+L_2}{\iff} \begin{cases} -2x+y+z &= 1 \\ x-2y+z &= -2 \\ 0 &= -1 \end{cases}$$

et $\mathscr{S} = \emptyset$.

Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & | & 1 \\ 1 & a & 1 & | & a \\ 1 & 1 & a & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 1 & \boxed{1} & | & 1 \\ 1-a & a-1 & 0 & | & a-1 \\ 1-a^2 & 1-a & 0 & | & -a \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} a & 1 & \boxed{1} & | & 1 \\ 1-a & \boxed{a-1} & 0 & | & a-1 \\ \boxed{2-a-a^2} & 0 & 0 & | & -1 \end{pmatrix}$$

Comme $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, $a - 1 \neq 0$ et $(2 - a - a^2) = -(a-1)(a+2) \neq 0$.

$$(S) \iff \begin{cases} \boxed{x} = \dfrac{1}{a^2+a-2} \\ \boxed{y} = 1 + x \\ \boxed{z} = 1 - ax - y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \boxed{x} = \dfrac{1}{a^2+a-2} \\ \boxed{y} = \frac{a^2+a-1}{a^2+a-2} \\ \boxed{z} = -\frac{a+1}{a^2+a-2} \end{cases}$$

et $\mathscr{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{a^2+a-2}, \dfrac{a^2+a-1}{a^2+a-2}, -\dfrac{a+1}{a^2+a-2} \right) \right\}$.

Conclusion :

— Si $a \in \{-2, 1\}$, alors $\mathscr{S} = \emptyset$.
— Si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, alors
$\mathscr{S} = \left\{ \left(\dfrac{1}{a^2+a-2}, \dfrac{a^2+a-1}{a^2+a-2}, -\dfrac{a+1}{a^2+a-2} \right) \right\}$.

Exercice 4. Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{C}$, le nombre de solutions du système suivant, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x & - & my & + & m^2 z & = & m \\ mx & - & m^2 y & + & mz & = & 1 \\ mx & + & y & - & m^3 z & = & -1 \end{cases}.$$

Correction.

On note (S) le système considéré et $\mathscr{S}$ son ensemble de solution.

$$\begin{aligned} \det(S) &= \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} \\ &\underset{\text{Sarrus}}{=} m^5 - m^3 + m^3 + m^5 - m - m^5 \\ &= m^5 - 1 \\ &= m(m^4 - 1) \\ &= m(m^2-1)(m^2+1) \\ &= m(m-1)(m+1)(m-i)(m+i). \end{aligned}$$

— Si $m \notin \{0, 1, -1, i, -i\}$, alors $\det(S) \neq 0$ et le système (S) admet une unique solution.
— Si $m = 0$, alors
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 0 \\ 0 & = & 1 \\ y & = & -1 \end{cases}$$
et (S) n'admet aucune solution.
— Si $m = 1$, alors
$$(S) \iff \begin{cases} x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & -1 \end{cases}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 1 & 1 & -1 & | & -1 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & | & -2 \end{pmatrix}$$
et (S) admet une infinité de solutions.

— Si $m=-1$, alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & -1 \\ -x & - & y & - & z & = & 1 \\ -x & + & y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\iff \boxed{x}+y+z=-1$$

et (S) admet une infinité de solutions.

— Si $m=i$, alors

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & iy & - & z & = & i \\ ix & + & y & + & iz & = & 1 \\ ix & + & y & + & iz & = & -1 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -i & -1 & i \\ i & 1 & i & 1 \\ i & 1 & i & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -i & -1 & i \\ 0 & 0 & \boxed{2i} & 2 \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -i & -1 & i \\ 0 & 0 & \boxed{2i} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

et (S) n'admet aucune solution.

— Si $m=-i$, alors

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & i & -1 & -i \\ -i & 1 & -i & 1 \\ -i & 1 & -i & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & i & -1 & -i \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & 2 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & i & -1 & -i \\ 0 & 0 & \boxed{-2i} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

et (S) n'admet aucune solution.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } m \notin \{0,-1,1,-i,i\}, \\ \text{alors } (S) \text{ admet une unique solution ;} \\ \text{Si } m \in \{0,i,-i\}, \\ \text{alors } (S) \text{ n'admet aucune solution ;} \\ \text{Si } m \in \{-1,1\}, \\ \text{alors } (S) \text{ admet une infinité de solution.} \end{array}}$

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 2 tels que $P(1)=1$, $P'(1)=1$ et $P(-1)=0$.

2. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré 3 tels que $P(-1)=1$, $P(1)=0$ et $P(2)=1$.

Correction.

1. Soit P un polynôme de degré 2, alors il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $P(x)=ax^2+bx+c$. On est amené à résoudre dans $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b+c & = & 1 \\ 2a+b & = & 1 \\ a-b+c & = & 0 \end{array}\right. .$$

Réponse : $\boxed{\begin{array}{c} \text{Il existe un polynôme de degré 2 satisfaisant} \\ \text{ces trois conditons : } P(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}. \end{array}}$

2. Soit P un polynôme de degré 3, alors il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. On est amené à résoudre dans $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ le système

$$\left\{\begin{array}{lcl} -a+b-c+d & = & 1 \\ a+b+c+d & = & 0 \\ 8a+4b+2c+d & = & 1 \end{array}\right. .$$

Réponse :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Il existe une infinité de polynômes de degré 3 satisfaisant} \\ \text{ces trois conditions :} \\ P(x)=(1+\frac{d}{2})x^3+(\frac{1}{2}-d)x^2-(\frac{1}{2}+\frac{d}{2})x+d \text{ avec } d\in\mathbb{R}. \end{array}}$$

Exercice 6. Résoudre le système suivant d'inconnue $(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^3$:

$$\begin{cases} x^3y^2z^6 &= 1 \\ x^4y^5z^{12} &= 2 \\ x^2y^2z^5 &= 3 \end{cases}.$$

Correction.

Soit $(x,y,z) \in \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^3$. On a

$$\begin{aligned}
(S) &\iff \begin{cases} \ln\left(x^3y^2z^6\right) &= \ln 1 \\ \ln\left(x^4y^5z^{12}\right) &= \ln 2 \\ \ln\left(x^2y^2z^5\right) &= \ln 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3\ln x + 2\ln y + 6\ln z &= \ln 1 \\ 4\ln x + 5\ln y + 12\ln z &= \ln 2 \\ 2\ln x + 2\ln y + 5\ln z &= \ln 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} 3X + 2Y + 6Z &= \ln 1 \\ 4X + 5Y + 12Z &= \ln 2 \\ 2X + 2Y + 5Z &= \ln 3 \end{cases} \text{ où } \begin{cases} X = \ln x \\ Y = \ln y \\ Z = \ln z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} X = & 6\ln 3 - 2\ln 2 \\ Y = & 12\ln 3 - 3\ln 2 \\ Z = & 2\ln 2 - 7\ln 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ln x = & 6\ln 3 - 2\ln 2 \\ \ln y = & 12\ln 3 - 3\ln 2 \\ \ln z = & 2\ln 2 - 7\ln 3 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = & \exp\left(6\ln 3 - 2\ln 2\right) \\ y = & \exp\left(12\ln 3 - 3\ln 2\right) \\ z = & \exp\left(2\ln 2 - 7\ln 3\right) \end{cases} \\
&\iff (x,y,z) = \left(\frac{3^6}{2^2}, \frac{3^{12}}{2^3}, \frac{2^2}{3^7}\right).
\end{aligned}$$

Donc (S) admet une unique solution $\left(\frac{3^6}{2^2}, \frac{3^{12}}{2^3}, \frac{2^2}{3^7}\right)$.