Feuille d'exercices n°7
Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Représentation graphique

Exercice 1. Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin(x)^2$
2. $f(x) = \dfrac{x}{x^2-4}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$
4. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1+\cos(x)}$
5. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$
6. $f(x) = \dfrac{1}{1-2\ln|x|}$

Composée

Exercice 2.

1. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions :

   (a) $f(x) = (x-3)^2$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = \ln(\cos(x))$

   (d) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{x}}$

2. Déterminer l'expression de $g\circ f$, son domaine de définition, ainsi que sa dérivée, lorsque :

   (a) $f : x \to \sqrt{x}$ et $g : x \to x^2$;
   (b) $f : x \to x^2$ et $g : x \to \sqrt{x}$;
   (c) $f : x \to 2x+1$ et $g : x \to x^3$;
   (d) $f : x \to \sin x$ et $g : x \to \frac{1}{x}$.

3. Soient

$$f : \begin{array}{rcl}]-\infty,3] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2+\sqrt{3-x} \end{array}$$

et

$$g : \begin{array}{rcl} [2;+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x^2+4x-1 \end{array}.$$

A-t-on $f\circ g = g\circ f$?

Parité, périodicité et monotonie

Exercice 3. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Étudier la parité éventuelle de $g\circ f$ selon les parités de f et de g.
2. On suppose que f et g sont strictement monotones sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si f et g ont le même sens de variation, alors $g\circ f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que si f et g n'ont pas le même sens de variation, alors $g\circ f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Limites

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\cos x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sin x}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \lfloor x\rfloor$

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f(x)=\ln x-2\sqrt{x}$$

et étudier ses variations.

2. Démontrer que pour tout $x\geqslant 1$, $0\leqslant \dfrac{\ln x}{x}\leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

Dérivation

Exercice 6. Sur quelles parties de $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$f(x)=x|x| \quad , \quad g(x)=\frac{x}{|x|+1} \quad , \quad h(x)=\begin{cases}\sin x & \text{si } x\geqslant 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}.$$

Exercice 7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(x)=\sqrt{x}\quad \text{si } 0\leqslant x\leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(x)=ax^2+bx+1 \quad \text{si } x>1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Exercice 8. 1. Montrer que :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1}$$

2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 3}\frac{\ln(x^2-3x+1)}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}.$$

Exercice 9. Montrer que :

1. $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x\geqslant x+1$.
2. $\forall x\in\mathbb{R}^{+\star},\ \ln(x)\leqslant x-1$.

Injection, surjection, bijection

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \mathrm{e}^x\end{array}$
2. $g:\begin{array}{ccc}[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to & [0,1]\\ x & \mapsto & \cos x\end{array}$
3. $h:\begin{array}{ccc}[1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & x^2-1\end{array}.$

Exercice 11. Montrer que f est bijective (en précisant l'intervalle J) et déterminer f^{-1} :

1. $f:\begin{array}{ccc}[-2,2] & \to & J\\ x & \mapsto & 3x+1\end{array}$
2. $f:\begin{array}{ccc}[-1,1] & \to & J\\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{1+x^2}\end{array}$
3. $f:\begin{array}{ccc}]-\infty,0[& \to & J\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\end{array}.$
4. $f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \to & J\\ x & \mapsto & \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\end{array}.$

Partie entière

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $\lfloor 3x+2 \rfloor = 5$ 2. $\lfloor x^2-2x+2 \rfloor = 2$.

Exercice 13. Montrer que :

1. la fonction partie entière est croissante ;
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$;
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Fonctions arcsin, arccos et arctan

Exercice 14.

1. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 2. $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{7\pi}{5}\right)\right)$ 3. $\arcsin\left(\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right)$
4. $\arccos\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ 5. $\arccos\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ 6. $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$
7. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ 8. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$ 9. $\arctan\left(\tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(x) = -\frac{1}{3}$ 2. $\cos(x) = \frac{1}{5}$ 3. $\tan(4x) = \frac{2}{3}$ 4. $\sin(x+3) = \frac{3}{5}$

Exercice 16. 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Exercice 17. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\cos(2\arccos x)$ 2. $\sin(2\arccos x)$ 3. $\cos(2\arctan x)$

Exercice 18. 1. Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$, $\quad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19. 1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions arcsin, arccos et arctan.

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$