

Feuille d'exercices n°7 – Correction

Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

Représentation graphique

Exercice 1. Étudier les fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sin^2(x)$ 2. $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ 3. $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$
 4. $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ 5. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ 6. $f(x) = \frac{1}{1 - 2 \ln|x|}$

Composée

Exercice 2. 1. Écrire les fonctions suivantes comme la composée de deux fonctions :

(a) $f(x) = (x - 3)^2$ (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ (c) $f(x) = \ln(\cos(x))$

(d) $f(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$

2. Déterminer l'expression de $g \circ f$, son domaine de définition, ainsi que sa dérivée, lorsque :

- (a) $f : x \rightarrow \sqrt{x}$ et $g : x \rightarrow x^2$;
 (b) $f : x \rightarrow x^2$ et $g : x \rightarrow \sqrt{x}$;
 (c) $f : x \rightarrow 2x + 1$ et $g : x \rightarrow x^3$;
 (d) $f : x \rightarrow \sin x$ et $g : x \rightarrow \frac{1}{x}$.

3. Soient

$$f :]-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto 2 + \sqrt{3 - x}$$

et

$$g : [2; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -x^2 + 4x - 1$$

A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Correction.

1. (a) $f(x) = (x - 3)^2 = u \circ v(x)$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = x - 3$.

1. (b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

1. (c) $f(x) = \ln(\cos(x)) = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = \cos(x)$.

1. (d) $f(x) = \frac{(e^x)^2}{1 + e^x} = u \circ v(x)$ avec $u(x) = \frac{x^2}{1 + x}$ et $v(x) = e^x$.

2. (a) $g \circ f(x) = (\sqrt{x})^2 = x$, $D_{g \circ f} =]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $(g \circ f)'(x) = 1$.

2. (b) $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$, $g \circ f$ n'est pas dérivable en 0 et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $(g \circ f)'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

2. (c) $g \circ f(x) = (2x + 1)^3$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)'(x) = 6(2x + 1)^2$.

2. (d) $g \circ f(x) = \frac{1}{\sin(x)}$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R} \setminus \{\text{zéros du sin}\} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, et pour tout $x \in D_{g \circ f}$, $(g \circ f)'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$.

3. On a $f \circ g : [2, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g \circ f :]-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$. Ainsi $f \circ g \neq g \circ f$.

Parité, périodicité et monotonie

Exercice 3. Soient $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1. Étudier la parité éventuelle de $g \circ f$ selon les parités de f et de g .
2. On suppose que f et g sont strictement monotones sur \mathbb{R} .
 - (a) Montrer que si f et g ont le même sens de variation, alors $g \circ f$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .
 - (b) Montrer que si f et g n'ont pas le même sens de variation, alors $g \circ f$ est strictement décroissante sur \mathbb{R} .
3. Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Correction.

1. Si f est paire, alors quelle que soit $g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \circ f$ est paire : En effet, soit $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est paire.

Si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire : En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(-f(x)) \quad (\text{car } f \text{ est impaire}) \\ &= g(f(x)) \quad (\text{car } g \text{ est paire}) \\ &= g \circ f(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est paire.

Si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire :

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g \circ f(-x) &= g(f(-x)) \\ &= g(-f(x)) \quad (\text{car } f \text{ est impaire}) \\ &= -g(f(x)) \quad (\text{car } g \text{ est impaire}) \\ &= -g \circ f(x). \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(-x) = -g \circ f(x)$ et $g \circ f$ est impaire.

2 (a) Supposons que f et g sont strictement décroissantes. Soient x et y des réels,

$$\begin{aligned} x < y &\implies f(x) > f(y) \quad (\text{car } f \text{ est strictement décroissante}) \\ &\implies g(f(x)) < g(f(y)) \quad (\text{car } g \text{ est strictement décroissante}) \\ &\implies g \circ f(x) < g \circ f(y) \end{aligned}$$

$g \circ f$ est donc strictement croissante.

Démonstration similaire lorsque f et g sont strictement croissantes.

2 (b) Supposon que f est strictement croissante et que g est strictement décroissante. Soient x et y des réels,

$$\begin{aligned} x < y &\implies f(x) < f(y) \quad (\text{car } f \text{ est strictement croissante}) \\ &\implies g(f(x)) > g(f(y)) \quad (\text{car } g \text{ est strictement décroissante}) \\ &\implies g \circ f(x) > g \circ f(y) \end{aligned}$$

$g \circ f$ est donc strictement décroissante.

Démonstration similaire lorsque f est strictement décroissante et g sont strictement décroissante.

3. Démonstration par analyse synthèse.

Analyse : Soient $f_P(x)$ une fonction paire et $f_I(x)$ une fonction impaire telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_P(x) + f_I(x) = f(x) \quad (1)$$

Alors

$$f_P(-x) + f_I(-x) = f(-x)$$

donc

$$f_P(x) - f_I(x) = f(-x) \quad (2)$$

Ainsi

$$\begin{cases} f_P(x) + f_I(x) = f(x) & (1) \\ f_P(x) - f_I(x) = f(-x) & (2) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} 2f_P(x) = f(x) + f(-x) & (1) + (2) \\ 2f_I(x) = f(x) - f(-x) & (1) - (2) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases} .$$

Synthèse : On a bien

$$f_P(x) + f_I(x) = f(x)$$

avec

$$\begin{cases} f_P(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_I(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases} .$$

On vérifie que f_P est bien une fonction paire ($f_P(-x) = f_P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et que f_I est bien une fonction impaire ($f_I(-x) = -f_I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Conclusion : f s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Limites

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos x$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x}$
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x}$
5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor$

Correction.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \cos(x) \geq x - 1$. Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + \cos(x) = +\infty$ par comparaison.

2. Pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos(x)}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ par encadrement.

3. Pour tout $x < 0$,

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{\sin(x)}{x} \geq \frac{1}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ par encadrement.

4. Pour tout $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} < \frac{\lfloor x \rfloor}{x} \leq \frac{x}{x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor}{x} = 1$ par encadrement.

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x \rfloor > x - 1.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ par comparaison.

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction

$$f(x) = \ln x - 2\sqrt{x}$$

et étudier ses variations.

2. Démontrer que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ et en déduire

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}.$$

Correction.

1. $D_f =]0, +\infty[$

f est dérivable sur D_f et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{x}$.

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$	$-\infty$	$\ln(2) - 2$	$-\infty$

2. On souhaite dans cette question retrouver la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$ sans faire appel aux croissances comparées.

Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(x) \geq \ln(1)$ et $x > 0$. Ainsi $\frac{\ln(x)}{x} \geq 0$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

D'après Q1, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $\ln(x) - 2\sqrt{x} \leq \ln(2) - 2 \leq 0$, donc $\ln(x) \leq 2\sqrt{x}$, donc $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$ pour tout $x \in [1, +\infty[$.

Ainsi pour tout $x \in [1, +\infty[$, $0 \leq \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$.

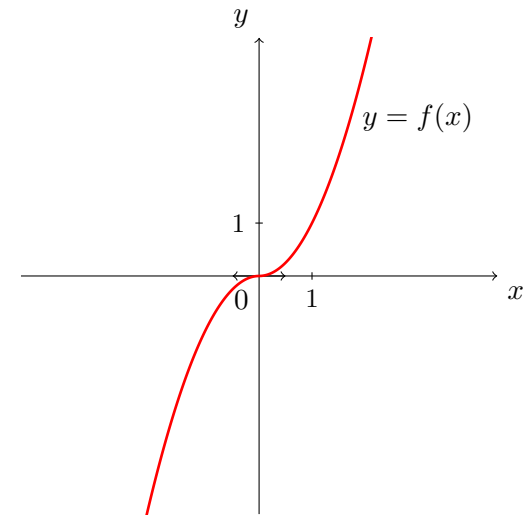
Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par encadrement.

Dérivation

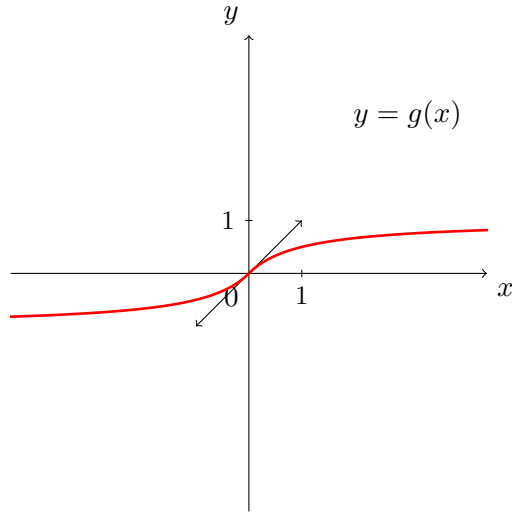
Exercice 6. Sur quelles parties de \mathbb{R} les fonctions suivantes sont-elles continues, dérivables ?

$$f(x) = x|x| \quad , \quad g(x) = \frac{x}{|x| + 1} \quad , \quad h(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

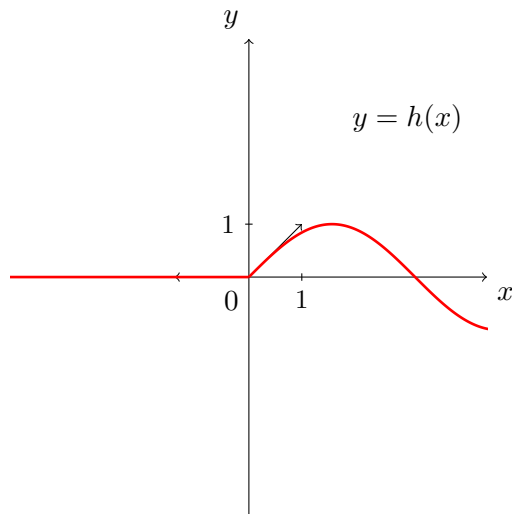
Correction.



La fonction f est continue et dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.



La fonction g est continue et dérivable en 0 et $g'(0) = 1$.



La fonction h est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0.

Exercice 7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pour que la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{et} \quad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur \mathbb{R}_+^* .

Correction.

f est continue et dérivable sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

$$\begin{aligned} f \text{ est continue en } 1 &\iff \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \\ &\iff \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 + bx + 1 = \sqrt{1} \\ &\iff a + b + 1 = 1 \\ &\iff a + b = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \text{ est dérivable en } 1 &\iff \begin{cases} f \text{ est continue en } 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} 2ax + b \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2a + b = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : f est dérivable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Exercice 8. 1. Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

2. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 3x + 1)}{x - 3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$$

Correction.

Rappel : Si f est dérivable en a alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

1. • La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \cos(0)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

• La fonction $f : x \mapsto \ln(1 + x)$ est dérivable en 0 $\left(f'(x) = \frac{1}{1+x} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \frac{1}{1+0}$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

• La fonction $f : x \mapsto e^x$ est dérivable en 0 et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^0}{x - 0} = e^0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

2. • La fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est dérivable en 0 $(f'(x) = 1 + \tan^2(x))$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = 1 + \tan^2(0)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$.

• La fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - 3x + 1)$ est dérivable en 3 $\left(f'(x) = \frac{2x - 3}{x^2 - 3x + 1} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 3x + 1) - \ln(1)}{x - 3} = 3$.

• La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$ est dérivable en 1 $\left(f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} \right)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{1}{4}$.

Exercice 9. Montrer que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$.

Correction.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$ est équivalent à montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x - 1 \geq 0$.

On pose $f(x) = e^x - x - 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 1$.

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff e^x - 1 = 0 \\ &\iff e^x = 1 \\ &\iff x = 0. \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Ce tableau de variations assure que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $e^x \geq x + 1$.

2. Montrer $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ln(x) \leq x - 1$ est équivalent $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, 0 \leq x - 1 - \ln(x)$.

On pose $g(x) = x - 1 - \ln(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.

x	0	1	$+\infty$	
$x - 1$	-	0	+	
x	0	+	+	
$g'(x)$		-	0	+
$g(x)$	$+\infty$		$+\infty$	

\swarrow 0 \searrow

Ce tableau de variations assure que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) \geq 0$, c'est-à-dire $\ln(x) \leq x - 1$.

Injection, surjection, bijection

Exercice 10. Les fonctions suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives?

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto e^x$
- $g: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [0, 1]$
 $x \mapsto \cos x$
- $h: [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$
 $x \mapsto x^2 - 1$

Correction.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective, mais pas surjective (0 n'admet pas d'antécédent par f). Elle n'est donc pas bijective.

Remarque : La fonction $\mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est bijective.
 $x \mapsto e^x$

2. g est surjective, g n'est pas injective car 0 admet deux antécédents : $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. La fonction g n'est donc pas bijective.

3. La fonction h est injective et surjective, elle est donc bijective.

Exercice 11. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} :

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2x + 1$
- $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$
 $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$
- $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$

Correction.

1.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

\swarrow

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donc bijective d'après le théorème de la bijection.

Rappel : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff 2x + 1 = y \\ &\iff 2x = y - 1 \\ &\iff x = \frac{y - 1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2}$.

Conclusion : $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
 $x \mapsto \frac{x-1}{2}$

2. $f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \times (2x)}{(1+x^2)^2} = 2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$.

x	-1	1
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-1	1

$f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ est continue et strictement croissante, $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ est donc bijective d'après le théorème de la bijection.

Rappel : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

Soient $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $y \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 f(x) = y &\iff \frac{2x}{1+x^2} = y \\
 &\iff 2x = y + yx^2 \\
 &\iff yx^2 - 2x + y = 0 \\
 &\iff x = \frac{2 - \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \text{ ou } x = \frac{2 + \sqrt{4 - 4y^2}}{2y} \\
 &\iff x = \frac{1}{y} (1 - \sqrt{1 - y^2}) \text{ ou } x = \frac{1}{y} (1 + \sqrt{1 - y^2}) \\
 &\iff x = \underbrace{\frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}}_{\in [-1, 1]} \text{ ou } x = \underbrace{\frac{1}{y} (1 + \sqrt{1 - y^2})}_{\notin [-1, 1]} \quad \# \times \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \\
 &\iff x = \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \quad \text{car } x \in [-1, 1]
 \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}$.

Conclusion : $f^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$.
 $x \mapsto \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	1	$-\infty$	$+\infty$ → 1

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $] - \infty, 1[$ à valeurs dans $] - \infty, 1[$, f réalise donc une bijection de $] - \infty, 1[$ sur $] - \infty, 1[$.

De même, en appliquant une seconde fois le théorème de la bijection, on montre que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$. Ainsi $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$ est bijective.

Rappel : $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$.

Soient $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \frac{x+1}{x-1} = y \\ &\iff x+1 = y(x-1) \\ &\iff 1+y = yx-x \\ &\iff 1+y = (y-1)x \\ &\iff x = \frac{1+y}{y-1}. \end{aligned}$$

Ainsi $f^{-1}(y) = \frac{1+y}{y-1}$.

Conclusion : $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$x \mapsto \frac{1+x}{x-1}$$

Partie entière

Exercice 12. Résoudre dans \mathbb{R} :

$$1. \lfloor 3x + 2 \rfloor = 5 \qquad 2. \lfloor x^2 - 2x + 2 \rfloor = 2.$$

Correction.

1.

$$\begin{aligned} \lfloor 3x + 2 \rfloor = 5 &\iff 5 \leq 3x + 2 < 6 \\ &\iff 3 \leq 3x < 4 \\ &\iff 1 \leq x < \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\left[1, \frac{4}{3}\right[$.

2.

$$\begin{aligned} \lfloor x^2 - 2x + 2 \rfloor = 2 &\iff 2 \leq x^2 - 2x + 2 < 3 \\ &\iff \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 1 < 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \\ x \in]1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}[\end{cases} \\ &\iff x \in]1 - \sqrt{2}, 0] \cup [2, 1 + \sqrt{2}[. \end{aligned}$$

Conclusion : L'ensemble des solutions est $]1 - \sqrt{2}, 0] \cup [2, 1 + \sqrt{2}[$.

Exercice 13. Montrer que :

1. la fonction partie entière est croissante ;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$;
3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Correction.

1. La fonction partie entière est croissante signifie que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\text{si } x \leq y, \text{ alors } \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor.$$

Démonstration : Soient x et y deux réels tels que $x \leq y$. Par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leq x \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Donc

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1,$$

Comme il s'agit d'entiers, on a

$$\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor.$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Donc

$$\underbrace{\lfloor x \rfloor + 1}_{\in \mathbb{Z}} \leq x + 1 < \underbrace{\lfloor x \rfloor + 1 + 1}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Or $\lfloor x + 1 \rfloor$ est l'unique entier tel que

$$\lfloor x + 1 \rfloor \leq x + 1 < \lfloor x + 1 \rfloor + 1.$$

Ainsi

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

par unicité.

Conclusion : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

3. Soient x et y deux réels. Par définition,

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1.$$

Or

$$x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leq x + y,$$

donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 \leq x + y - 1 < \lfloor x + y \rfloor \leq x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2,$$

ainsi

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 < \lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2.$$

Comme il s'agit d'entiers, on a

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

Fonctions arcsin, arccos et arctan

Exercice 14.

1. $\arcsin(\sin(-\frac{\pi}{4}))$
2. $\arcsin(\sin(-\frac{7\pi}{5}))$
3. $\arcsin(\sin(\frac{21\pi}{4}))$
4. $\arccos(\cos(-\frac{5\pi}{3}))$
5. $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{4}))$
6. $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3}))$
7. $\arctan(\tan(-\frac{\pi}{4}))$
8. $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{6}))$
9. $\arctan(\tan(-\frac{3\pi}{4}))$

Correction.

Indication : Représenter les angles mis en jeu (et leur sinus) sur un cercle trigonométrique et se rappeler que $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arccos(x) \in [0, \pi]$ et $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1. $\arcsin(\sin(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$ car $-\frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. $\arcsin(\sin(-\frac{7\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\frac{3\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{3\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\frac{2\pi}{5})) = \frac{2\pi}{5}$ car $\frac{2\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. $\arcsin(\sin(\frac{21\pi}{4})) = \arcsin(\sin(5\pi + \frac{\pi}{4})) = \arcsin(\sin(\pi + \frac{\pi}{4})) = \arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\frac{\pi}{4}$.
4. $\arccos(\cos(-\frac{5\pi}{3})) = \arccos(\cos(\frac{\pi}{3})) = \frac{\pi}{3}$ car $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.
5. $\arccos(\cos(\frac{3\pi}{4})) = \frac{3\pi}{4}$ car $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$.
6. $\arccos(\cos(\frac{2\pi}{3})) = \frac{2\pi}{3}$ car $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$.
7. $\arctan(\tan(-\frac{\pi}{4})) = -\frac{\pi}{4}$ car $-\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
8. $\arctan(\tan(-\frac{7\pi}{6})) = \arctan(\tan(-\frac{\pi}{6})) = -\frac{\pi}{6}$ car $-\frac{\pi}{6} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
9. $\arctan(\tan(-\frac{3\pi}{4})) = \arctan(\tan(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$ car $\frac{\pi}{4} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 15. Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\sin(x) = -\frac{1}{3}$
2. $\cos(x) = \frac{1}{5}$
3. $\tan(4x) = \frac{2}{3}$
4. $\sin(x+3) = \frac{3}{5}$

Correction.

1.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= -\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow x &= \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= -\arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = \pi + \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1}{5} \\ \Leftrightarrow x &= \arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } x = -\arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \tan(4x) = \frac{2}{3} &\Leftrightarrow 4x = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{2}{3}\right) + k\frac{\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sin(x+3) &= \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow x+3 &= \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi \text{ ou } x+3 = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ \Leftrightarrow x &= \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 3 + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) - 3 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Exercice 16. 1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.2. En d eduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.**Correction.**1. On sait que pour tout $X \in \mathbb{R}, \frac{1}{\cos^2(X)} = 1 + \tan^2(X)$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}, \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$,
donc $\sqrt{\cos^2(\arctan(x))} = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$ ie $|\cos(\arctan(x))| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Or $\arctan(x) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc $\cos(\arctan(x)) > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. On sait que pour tout $X \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \tan(X) = \frac{\sin(X)}{\cos(X)}$. Donc

pour tout $x \in \mathbb{R}, \tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(\arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}$, donc $\sin(\arctan(x)) = x \times \cos(\arctan(x))$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 17. Simplifier les expressions suivantes :1. $\cos(2 \arccos x)$ 2. $\sin(2 \arccos x)$ 3. $\cos(2 \arctan x)$ **Correction.**

1.

$$\begin{aligned} \cos(2 \arccos(x)) &= 1 - 2 \cos^2(\arccos(x)) \quad \# \cos(2X) = 1 - 2 \cos^2(X) \\ &= 1 - 2x^2. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\sin(2 \arccos(x)) &= 2 \sin(\arccos(x)) \cos(\arccos(x)) \quad \# \sin(2X) = 2 \sin(X) \cos(X) \\ &= 2\sqrt{1-x^2} \times x \\ &= 2x\sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\cos(2 \arctan(x)) &= 1 - 2 \cos^2(\arctan(x)) \quad \# \cos(2X) = 1 - 2 \cos^2(X) \\ &= 1 - 2 \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} \quad \# \frac{1}{\cos^2(X)} = 1 + \tan^2(X) \\ &= 1 - 2 \frac{1}{1 + x^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{1 + x^2}.\end{aligned}$$

Exercice 18. 1. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\ast}$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Correction.

1. On introduit la fonction $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$ pour tout $x \in [-1, 1]$. f est continue sur $[-1, 1]$ et f est dérivable sur $] -1, 1[$ et pour tout $x \in] -1, 1[$, $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. La fonction f est donc constante sur $[-1, 1]$ et pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}f(x) &= f(0) \\ &= \arccos(0) + \arcsin(0) \\ &= \frac{\pi}{2} + 0 \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$.

2. On introduit la fonction $g(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. La fonction g est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \left[\frac{1}{x}\right]' \times \arctan'\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0.\end{aligned}$$

La fonction g est donc constante sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = g(1) = 2 \arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : Pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 19. 1. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive des fonctions \arcsin , \arccos et \arctan .

2. Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Correction.

1. Une primitive de $f(x) = \arcsin(x)$ est $F(x) = \int_0^x \arcsin(t) dt$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x 1 \times \arcsin(t) dt \\ &= [t \times \arcsin(t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= x \arcsin(x) + \int_0^x \frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= x \arcsin(x) + \left[\sqrt{1-t^2} \right]_0^x \\ &= x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1. \end{aligned}$$

Une primitive de $x \mapsto \arcsin(x)$ est $x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} - 1$.

Une primitive de $x \mapsto \arccos(x)$ est $x \mapsto x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2} + 1$.

Une primitive de $x \mapsto \arctan(x)$ est $x \mapsto x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx &= [\arctan(x)]_0^1 \\ &= \arctan(1) - \arctan(0) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= [\arcsin(x)]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \times \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$