# Feuille d'exercices n°8
# Géométrie élémentaire du plan

Dans ce chapitre, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan et $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

## Repérage dans le plan

**Exercice 1.** Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $(\alpha, 1)$ et $(\beta, \alpha)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Pour quelles valeurs de $\alpha$ et $\beta$ les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ constituent-ils :

1. une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ ?
2. une base orthogonale de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ ?
3. une base orthonormale de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ ?

**Exercice 2.** Soit $O' \in \mathscr{P}$ de coordonnées $(2, -1)$ dans $\mathcal{R}$. On pose $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.
2. Soit $M$ un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x', y')$ dans $\mathcal{R}'$ et de coordonnées $(x, y)$ dans $\mathcal{R}$. Exprimer $(x, y)$ en fonction de $(x', y')$.
3. On considère $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ de coordonnées $(x, y)$ dans $\mathcal{R}$ tels que $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -4$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ dans $\mathcal{R}'$.

## Produit scalaire et déterminant

**Exercice 3.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de vecteurs du plan de coordonnées respectives $(1, 2)$ et $(3, 1)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Déterminer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$.

**Exercice 4.** Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$
2. $\det(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v})$.

**Exercice 5.** Soit $(A, B, C) \in \mathscr{P}^3$. Montrer que :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

**Exercice 6.** Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

## Droites

**Exercice 7.** Déterminer une équation cartésienne, puis une équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ :

1. passant par le point $A$ de coordonnées $(2, 1)$ dans $\mathcal{R}$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(1, -1)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ ;
2. passant par le point $A$ de coordonnées $(-1, 0)$ dans $\mathcal{R}$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1, -2)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ ;

3. passant par les points $A$ et $B$ de coordonnées respectives $(1,2)$ et $(-2,3)$ dans $\mathcal{R}$ ;
4. passant par l'origine et parallèle à la droite $\mathscr{D}_0$ dont une équation cartésienne est $x+y-1=0$ ;
5. passant par le point $A$ de coordonnées $(1,1)$ dans $\mathcal{R}$ et perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}_0$ dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & -1+t \end{array}\right.$ ; $t \in \mathbb{R}$.

**Exercice 8.** Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

1. $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 2-3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
2. $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2t \\ y & = & 1+3t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

**Exercice 9.**

1. On considère la famille de droites $\mathscr{D}_\lambda \ : \ x+\lambda y+1=0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point $A$ dont on précisera les coordonnées.
   (b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui, préciser une équation de cette droite.
   (c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui, préciser une équation de cette droite.
   (d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite $\Delta$ d'équation $2x-3y+1=0$ ? Si oui, préciser les équations de ces droites.
2. On considère la famille de droites $\mathscr{D}_m \ : \ (2m-1)x+(3-m)y+m+1=0$, où $m \in \mathbb{R}$. Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $\Delta \ : \ x+y-1=0$ ? Si oui, laquelle ?

**Exercice 10.** Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations respectives $3x-4y+4=0$ et $12x+5y-5=0$. Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer une équation cartésienne de chacune de leurs bissectrices.

**Exercice 11.** Soient $A$ et $B$ deux points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,1)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(AB)$.
2. Soit $C$ le point de coordonnées $(1,1)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer la distance du point $C$ à la droite $(AB)$.
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H$ de $C$ sur la droite $(AB)$.
4. Retrouver la distance du point $C$ à la droite $(AB)$ en utilisant la question précédente.

**Exercice 12.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(-1,-1)$, $(2,3)$ et $(3,-3)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Calculer l'aire du triangle $ABC$.
2. En déduire la distance de $A$ à la droite $(BC)$.

**Exercice 13.**

1. Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(-1,1)$, $(3,-1)$ et $(1,4)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle $ABC$. Vérifier qu'elles sont concourantes et déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle $ABC$.
2. Montrer que les médiatrices du triangle $ABC$ sont concourantes en un point $O$, centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$.
3. Montrer que les médianes du triangle $ABC$ sont concourantes en un point $G$, centre de gravité du triangle $ABC$.

# Cercles

**Exercice 14.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(2,3)$, $(4,5)$, $(2,5)$.

1. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
2. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle $ABC$.

**Exercice 15.** Déterminer le centre et le rayon du cercle dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est :

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0$.
2. $x^2+y^2-6x+8y+24=0$.

**Exercice 16.** On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation

$$\mathscr{C} \ : \ x^2+y^2+10x-2y+6=0$$

et la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$\mathscr{D} \ : \ 2x + y - 7 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ qui sont parallèles à la droite $\mathscr{D}$.

**Exercice 17.** Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soient $A$ et $\Omega$ deux points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(x_0, y_0)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega$ passant par $A$.

1. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}_m$ la droite passant par l'origine, d'équation $y = mx$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $m$ pour que la droite $\mathscr{D}_m$ soit tangente à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer l'ensemble des points $\Omega$ tels que les deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par l'origine soient perpendiculaires.

## Transformations affines du plan

**Exercice 18.** Donner les expressions analytiques dans $\mathcal{R}$ de :

1. la projection sur la droite $y = -2x + 1$ parallèlement à la droite $y = 3x$ ;
2. la symétrie par rapport à la droite $y = -2x + 1$ parallèlement à la droite $y = 3x$ ;
3. la réflexion d'axe $x + y = 1$.