Feuille d'exercices n°8 – Correction
Géométrie élémentaire du plan

Dans ce chapitre, on note $\mathscr{P}$ l'ensemble des points du plan et $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan. Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Repérage dans le plan

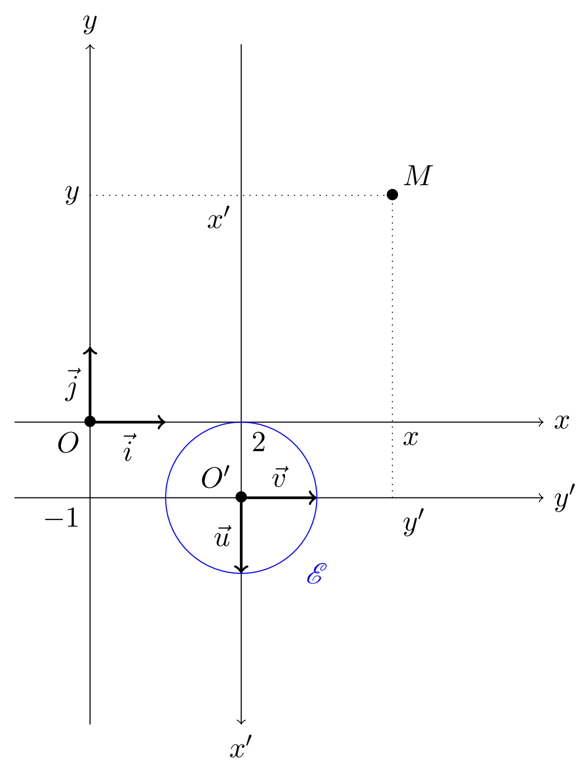
Exercice 1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan de coordonnées respectives $(\alpha, 1)$ et (β, α) dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$. Pour quelles valeurs de α et β les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ constituent-ils :

1. une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$?
2. une base orthogonale de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$?
3. une base orthonormale de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$?

1. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ si et seulement si $\beta \neq \alpha^2$.
2. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthogonale de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ si et seulement si ($\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$) ou $\beta = -1$.
3. $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base orthonormale de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ si et seulement si ($\alpha = 0$ et $\beta = -1$) ou ($\alpha = 0$ et $\beta = 1$).

Exercice 2. Soit $O' \in \mathscr{P}$ de coordonnées $(2, -1)$ dans $\mathcal{R}$. On pose $\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i}$.

1. Vérifier que $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormé direct de $\mathscr{P}$.
2. Soit M un point de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x', y') dans $\mathcal{R}'$ et de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$. Exprimer (x, y) en fonction de (x', y').
3. On considère $\mathscr{E}$ l'ensemble des points de $\mathscr{P}$ de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$ tels que $x^2 - 4x + y^2 + 2y = -4$. Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ dans $\mathcal{R}'$.



1. On a
$$\begin{cases} x = 2 + y' \\ y = -1 - x' \end{cases}.$$

2.
$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 + 2y = -4 &\iff (x-2)^2 - 4 + (y+1)^2 - 1 = -4 \\ &\iff (x-2)^2 + (y+1)^2 = 1 \\ &\iff x'^2 + y'^2 = 1 \end{aligned}$$

$\mathscr{E}$ est le cercle de centre O' et de rayon 1.

Produit scalaire et déterminant

Exercice 3. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de vecteurs du plan de coordonnées respectives $(1,2)$ et $(3,1)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Déterminer $\cos(\vec{u},\vec{v})$ et $\sin(\vec{u},\vec{v})$. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$.

On a
$$\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
et
$$\sin(\vec{u},\vec{v}) = \frac{[\vec{u},\vec{v}]}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$
Conclusion : Une mesure de l'angle $(\vec{u},\vec{v})$ est $-\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4. Soit $(\vec{u},\vec{v}) \in \vec{\mathscr{P}}^2$. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2$ 2. $\det(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v})$.

1. $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 4\ \vec{u}\cdot\vec{v}$.
2. $\det(\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}) = -2\det(\vec{u},\vec{v})$.

Exercice 5. Soit $(A,B,C) \in \mathscr{P}^3$. Montrer que :
$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}).$$

On a
$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) + \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\ &= \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \\ &= -\det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}). \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) &= -\det(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) \\ &= \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \\ &= \cancel{\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AC})} + \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \\ &= \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}). \end{aligned}$$
Conclusion : $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que :
$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2.$$

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{BD}\|^2 \\ &= \|\vec{AB} + \vec{BC}\|^2 + \|\vec{BC} + \vec{CD}\|^2 \text{ en utilisant la relation de Chasles} \\ &= \|\vec{AB}\|^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{BC} + \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + 2\vec{BC}\cdot\vec{CD} + \|\vec{CD}\|^2 \\ &= AB^2 + 2\vec{AB}\cdot\vec{BC} + BC^2 + DA^2 + 2\vec{BC}\cdot(-\vec{AB}) + CD^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 \quad \text{car } \vec{BC}\cdot(-\vec{AB}) = -\vec{AB}\cdot\vec{BC}. \end{aligned}$$
Conclusion : $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$.

Droites

Exercice 7. Déterminer une équation cartésienne, puis une équation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$:

1. passant par le point A de coordonnées $(2,1)$ dans $\mathcal{R}$ et de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées $(1,-1)$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$;
   $\mathscr{D} : x - y - 1 = 0, \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$
2. passant par le point A de coordonnées $(-1,0)$ dans $\mathcal{R}$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1,-2)$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$;
   $\mathscr{D} : 2x + y + 2 = 0, \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x = t \\ y = -2 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$
3. passant par les points A et B de coordonnées respectives $(1,2)$ et $(-2,3)$ dans $\mathcal{R}$;
   $\mathscr{D} : x + 3y - 7 = 0, \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$
4. passant par l'origine et parallèle à la droite $\mathscr{D}_0$ dont une équation cartésienne est $x + y - 1 = 0$;
   $\mathscr{D} : x + y = 0, \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$
5. passant par le point A de coordonnées $(1,1)$ dans $\mathcal{R}$ et perpendiculaire à la droite $\mathscr{D}_0$ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases} ; \ t \in \mathbb{R}.$
   $\mathscr{D} : 2x + y - 3 = 0, \quad \mathscr{D} : \begin{cases} x = t \\ y = 3 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

Exercice 8. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ dont une représentation paramétrique est :

1. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$ 2. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$

1. $\mathscr{D} \ : \ 3x - y - 1 = 0.$
2. $\mathscr{D} \ : \ 3x - 2y + 2 = 0.$

Exercice 9. 1. On considère la famille de droites $\mathscr{D}_\lambda \ : \ x + \lambda y + 1 = 0$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on précisera les coordonnées.

(b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui, préciser une équation de cette droite.

(c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui, préciser une équation de cette droite.

(d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$? Si oui, préciser les équations de ces droites.

2. On considère la famille de droites $\mathscr{D}_m \ : \ (2m-1)x + (3-m)y + m + 1 = 0$, où $m \in \mathbb{R}$. Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $\Delta \ : \ x + y - 1 = 0$? Si oui, laquelle ?

1. (a) Le point $A(-1,0)$ appartient à $\mathscr{D}_\lambda$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En effet, $-1 + \lambda \times 0 + 1 = 0$.

(b) Le vecteur $\overrightarrow{u}_\lambda(\lambda,-1)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}_\lambda$. $\mathscr{D}_\lambda$ est verticale si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}_\lambda$ et $\overrightarrow{j}$ sont colinéaires, si et seulement si $[\overrightarrow{u}_\lambda, \overrightarrow{j}] = 0$, si et seulement si $\lambda = 0$.
Conclusion : $\mathscr{D}_0 \ : \ x + 1 = 0$ est verticale.

(c) $\mathscr{D}_\lambda$ est horizontale si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}_\lambda$ et $\overrightarrow{i}$ sont colinéaires, si et seulement si $[\overrightarrow{u}_\lambda, \overrightarrow{i}] = 0$, si et seulement si $1 = 0$.
Conclusion : Il n'existe pas de droite $\mathscr{D}_\lambda$ qui soit horizontale.

(d) — $\mathscr{D}_\lambda$ est parallèle à Δ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}_\lambda$ et $\overrightarrow{u}_\Delta(3,2)$ sont colinéaires, si et seulement si $[\overrightarrow{u}_\lambda, \overrightarrow{u}_\Delta] = 0$, si et seulement si $\lambda = -\frac{3}{2}$.
Conclusion : $\mathscr{D}_{-\frac{3}{2}} \ : \ x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$ est parallèle à Δ.

— $\mathscr{D}_\lambda$ est perpendiculaire à Δ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}_\lambda$ et $\overrightarrow{u}_\Delta(3,2)$ sont orthogonaux, si et seulement si $\overrightarrow{u}_\lambda \cdot \overrightarrow{u}_\Delta = 0$, si et seulement si $\lambda = \frac{2}{3}$.
Conclusion : $\mathscr{D}_{\frac{2}{3}} \ : \ x + \frac{2}{3}y + 1 = 0$ est perpendiculaire à Δ.

— Il n'existe pas de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les droites $\mathscr{D}_\lambda$ et Δ soient confondues, car $A \notin \Delta$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{n}_m(2m-1, 3-m)$ (resp. $\overrightarrow{n}_\Delta(1,1)$) est un vecteur normal de la droite $\mathscr{D}_m$ (resp. Δ). Les droites $\mathscr{D}_m$ et Δ sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{n}_m$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux, si et seulement si $\overrightarrow{n}_m \cdot \overrightarrow{n} = 0$, si et seulement si $m = -2$.

Exercice 10. Soient $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ deux droites d'équations respectives $3x - 4y + 4 = 0$ et $12x + 5y - 5 = 0$. Montrer que ces deux droites sont sécantes et déterminer une équation cartésienne de chacune de leurs bissectrices.

Le vecteur $\overrightarrow{u}(4,3)$ (resp. $\overrightarrow{u}'(5,-12)$) est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$).

On a $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'] = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = -63 \neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u}'$ ne sont pas colinéaires. Les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles, elles sont donc sécantes.

$$\begin{array}{ll}
 & \text{Le point } M(x,y) \text{ appartient à l'une des bissectrices de } \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D}' \\
\Longleftrightarrow & \mathrm{d}(M, \mathscr{D}) = \mathrm{d}(M, \mathscr{D}') \\
\Longleftrightarrow & \dfrac{|3x-4y+4|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{|12x+5y-5|}{\sqrt{12^2+5^2}} \\
\Longleftrightarrow & 13 \times |3x-4y+4| = 5 \times |12x+5y-5| \\
\Longleftrightarrow & 13(3x-4y+4) = 5(12x+5y-5) \\
 & \text{ ou } 13(3x-4y+4) = -5(12x+5y-5) \\
\Longleftrightarrow & 39x - 52y + 52 = 60x + 25y - 25 \\
 & \text{ ou } 39x - 52y + 52 = -60x - 25y + 25 \\
\Longleftrightarrow & 21x + 77y - 77 = 0 \text{ ou } 99x - 27y + 27 = 0.
\end{array}$$

Conclusion : Les droites d'équations $21x+77y-77=0$ et $99x-27y+27=0$ sont les bissectrices de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Exercice 11. Soient A et B deux points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,1)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Soit C le point de coordonnées $(1,1)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer la distance du point C à la droite (AB).
3. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H de C sur la droite (AB).
4. Retrouver la distance du point C à la droite (AB) en utilisant la question précédente.

1. $(AB)\ :\ x + 2y - 1 = 0$.
2. $\mathrm{d}(C,(AB)) = \frac{|x_C + 2y_C - 1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
$\boxed{\mathrm{d}(C,(AB)) = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}}$.
3. Notons (x_H, y_H) les coordonnées de H. On sait que :
$$H \in (AB) \text{ et } \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}.$$
Donc $x_H + 2y_H - 1 = 0$ et $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$,
ie $\begin{cases} x_H + 2y_H & = & 1 \\ -2x_H + y_H & = & -1 \end{cases}$. On en déduit que les coordonnées de H sont $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.
4.
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(C,(AB)) &= CH \\
&= \|\overrightarrow{CH}\| \\
&= \sqrt{\left(-\tfrac{2}{5}\right)^2 + \left(-\tfrac{4}{5}\right)^2} \\
&= \sqrt{\tfrac{20}{25}} \\
&= \sqrt{\tfrac{4}{5}} \\
&= \tfrac{2}{\sqrt{5}}
\end{aligned}.$$

Exercice 12. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(-1,-1)$, $(2,3)$ et $(3,-3)$ dans $\mathcal{R}$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. En déduire la distance de A à la droite (BC).

1. $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = 11$ u.a..
2. On note H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC).
On a $\mathscr{A}_{ABC} = \frac{BC \times AH}{2}$, donc $AH = \frac{2\mathscr{A}_{ABC}}{BC} = \frac{22\sqrt{37}}{37}$ u.

Exercice 13. 1. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(-1,1)$, $(3,-1)$ et $(1,4)$ dans $\mathcal{R}$. Déterminer une équation cartésienne de chacune des hauteurs du triangle ABC. Vérifier qu'elles sont concourantes et déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC.

2. Montrer que les médiatrices du triangle ABC sont concourantes en un point O, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
3. Montrer que les médianes du triangle ABC sont concourantes en un point G, centre de gravité du triangle ABC.

1. On note $\mathscr{H}_A$ (resp. $\mathscr{H}_B$, $\mathscr{H}_C$) la hauteur issue de A (resp. B, C).
   $\mathscr{H}_A \;:\; 2x-5y+7=0$
   $\mathscr{H}_B \;:\; 2x+3y-3=0$
   $\mathscr{H}_C \;:\; 2x-y+2=0.$
   On note H le point d'intersection des droites $\mathscr{H}_A \cap \mathscr{H}_B$:
   $$\begin{cases} 2x_H-5y_H &= -7 \\ 2x_H+3y_H &= 3 \end{cases} \Longrightarrow x_H = -\frac{3}{8} \text{ et } y_H = \frac{5}{4}.$$
   Enfin H appartient à $\mathscr{H}_C$ (car ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite). On peut donc conclure que les trois hauteurs du triangle ABC sont concourantes en H.
2. On note I (resp. J, K) le milieu du segment $[AB]$ (resp. $[BC]$, $[AC]$) :
   $$I(1,0) \quad J=\left(2,\tfrac{3}{2}\right) \quad K=\left(0,\tfrac{5}{2}\right).$$
   On note $\mathscr{M}_{[AB]}$ (resp. $\mathscr{M}_{[BC]}$, $\mathscr{M}_{[AC]}$) la médiatrice du segment $[AB]$ (resp. $[BC]$, $[AC]$).
   $\mathscr{M}_{[AB]} \;:\; 2x-y-2=0$
   $\mathscr{M}_{[BC]} \;:\; 4x-10y+7=0$
   $\mathscr{M}_{[AC]} \;:\; 4x+6y-15=0.$
   On note O le point d'intersection des droites $\mathscr{M}_{[AB]} \cap \mathscr{M}_{[BC]}$:
   $$\begin{cases} 2x_O-y_O &= 2 \\ 4x_O-10y_O &= -7 \end{cases} \Longrightarrow x_O = \frac{27}{16} \text{ et } y_O = \frac{11}{8}.$$
   Enfin O appartient à $\mathscr{M}_{[AC]}$ (car ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite). On peut donc conclure que les trois médiatrices du triangle ABC sont concourantes en O.
3. $(AJ) \;:\; x-6y+7=0$
   $(BK) \;:\; 7x+6y-15=0$
   $(CI) \;:\; x=1.$
   On note G le point d'intersection des droites (AJ) et (CI) :
   $$\begin{cases} x_G-6y_G &= -7 \\ x_G &= 1 \end{cases} \Longrightarrow x_G = 1 \text{ et } y_G = \frac{4}{3}.$$
   Enfin G appartient à (BK) (car ses coordonnées vérifient l'équation de cette droite). On peut donc conclure que les médianes du triangle ABC sont concourantes en G.

Cercles

Exercice 14. Soient A, B et C trois points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(2,3)$, $(4,5)$, $(2,5)$.

1. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$.
   $(x-3)^2+(y-4)^2=2.$
2. Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC.
   $(x-3)^2+(y-4)^2=2.$

Exercice 15. Déterminer le centre et le rayon du cercle dont une équation cartésienne dans $\mathcal{R}$ est :

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0.$
2. $x^2+y^2-6x+8y+24=0.$

1. $x^2+y^2-4x+4y-1=0 \iff (x-2)^2+(y+2)^2=3^2.$
   Il s'agit du cercle de centre $\Omega(2,-2)$ et de rayon 3.
2. $x^2+y^2-6x+8y+24=0 \iff (x-3)^2+(y+4)^2=1^2.$
   Il s'agit du cercle de centre $\Omega(3,-4)$ et de rayon 1.

Exercice 16. On considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation

$$\mathscr{C} \;:\; x^2+y^2+10x-2y+6=0$$

et la droite $\mathscr{D}$ d'équation

$$\mathscr{D} \;:\; 2x+y-7=0.$$

Déterminer une équation cartésienne des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ qui sont parallèles à la droite $\mathscr{D}$.

Soit T une tangente au cercle $\mathscr{C}$ parallèle à la droite $\mathscr{D}$.
T est parallèle à $\mathscr{D}$ donc une équation de T est de la forme $2x+y+c=0$ avec c à déterminer.

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(-5,1)$ et de rayon $r = 2\sqrt{5}$.
T est tangente au cercle $\mathscr{C}$, donc $\mathrm{d}(\Omega, T) = r$, donc $\frac{|2\times(-5)+1+c|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2\sqrt{5}$, donc $|c-9| = 10$, donc $c = 19$ ou $c = -1$.
Conclusion : Les équations des tangentes au cercle $\mathscr{C}$ qui sont parallèles à la droite $\mathscr{D}$ sont $2x+y+19=0$ et $2x+y-1=0$.

Exercice 17. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Soient A et Ω deux points de $\mathscr{P}$ de coordonnées respectives $(1,0)$ et (x_0, y_0). On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.

1. Déterminer une équation de $\mathscr{C}$.
2. Soit $m \in \mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}_m$ la droite passant par l'origine, d'équation $y = mx$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur m pour que la droite $\mathscr{D}_m$ soit tangente à $\mathscr{C}$.
3. Déterminer l'ensemble des points Ω tels que les deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par l'origine soient perpendiculaires.

1. $\mathscr{C} \,:\, (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = (1-x_0)^2 + (y_0)^2$.
2. On note r le rayon du cercle $\mathscr{C}$: $r = \sqrt{(1-x_0)^2 + (y_0)^2}$.
   $\mathscr{D}_m$ est tangente à $\mathscr{C}$
   $\iff \quad \mathrm{d}(\Omega, \mathscr{D}_m) = r$
   $\iff \quad (2x_0 - y_0^2 - 1)m^2 - 2x_0y_0m - (1-x_0)^2 = 0$.
3. On montre que les points Ω tels que les deux tangentes à $\mathscr{C}$ passant par l'origine soient perpendiculaires décrivent le cercle de centre $(2,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Transformations affines du plan

Exercice 18. Donner les expressions analytiques dans $\mathcal{R}$ de :

1. la projection p sur la droite $\Delta : y = -2x+1$ parallèlement à la droite $\mathscr{D} : y = 3x$;
2. la symétrie s par rapport à la droite $\Delta : y = -2x+1$ parallèlement à la droite $\mathscr{D} : y = 3x$;
3. la réflexion r d'axe $\Delta : x+y=1$.

1. Soit $M(x_M, y_M) \in \mathscr{P}$. On note $H(x_H, y_H)$ le projeté de M sur Δ parallèlement à $\mathscr{D}$. Le vecteur $\vec{u}(1,3)$ est un vecteur directeur de la droite $\mathscr{D}$.
   D'une part, $H \in \Delta$ donc $2x_H + y_H = 1$.
   D'autre part, $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires donc $\begin{vmatrix} x_H - x_M & 1 \\ y_H - y_M & 3 \end{vmatrix} = 0$, donc $3x_H - y_H = 3x_M - y_M$. On en déduit $x_H = \frac{3x_M - y_M + 1}{5}$ et $y_H = \frac{3 - 6x_M + 2y_M}{5}$.

   Conclusion : $p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{3x-y+1}{5}, \frac{3-6x+2y}{5}\right) \end{array}$.
2. On note $M'(x_{M'}, y_{M'})$ le symétrique de M par la transformation s. On sait que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$, donc $x_{M'} = 2x_H - x_M$ et $y_{M'} = 2y_H - y_M$. D'où
   $$x_{M'} = \frac{x_M - 2y_M + 2}{5} \quad \text{et} \quad y_{M'} = \frac{6 - 12x_M - y_M}{5}.$$
   Conclusion : $s : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \left(\frac{x-2y+2}{5}, \frac{6-12x-y}{5}\right) \end{array}$.
3. On note $H(x_H, y_H)$ le projeté orthogonal de $M(x_M, y_M)$ sur Δ. Alors $H \in \Delta$ et $\overrightarrow{MH}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}(1,1)$, donc $\begin{cases} x_H + y_H = 1 \\ x_H - y_H = x_M - y_M \end{cases}$ ie
   $$\begin{cases} x_H = \frac{x_M - y_M + 1}{2} \\ y_H = \frac{1 - x_M + y_M}{2} \end{cases}.$$
   On note $M'(x_{M'}, y_{M'})$ le symétrique de M par la transformation r. Alors $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$, donc $x_{M'} = 2x_H - x_M$ et $y_{M'} = 2y_H - y_M$. D'où
   $$x_{M'} = 1 - y_M \quad \text{et} \quad y_{M'} = 1 - x_M.$$
   Conclusion : $r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (1-y, 1-x) \end{array}$.