Feuille d'exercices n°9
Logique et ensembles

Exercice 1. Compléter, lorsque cela est possible, les pointillés par $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$:

1. $x^2 = 4 \quad \ldots \quad x = 2$;
2. $x \geq 1 \quad \ldots \quad x \geq 2$;
3. $x < 1 \quad \ldots \quad x = 1$;
4. $x + 3 \geq 4 \quad \ldots \quad x \geq 1$.

Exercice 2. On considère les quatre propositions suivantes :

$$\begin{array}{llll} (a)\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0 & ; & (b)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0 & ; \\ (c)\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0 & ; & (d)\ \exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y^2 > x & . \end{array}$$

1. Les propositions $(a), (b), (c), (d)$ sont-elles vraies ou fausses ?
2. Nier chacune de ces propositions.

Exercice 3. Nier les assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.
2. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'implication I définie par :

$$I \quad : \quad n \text{ est impair } \Longrightarrow n^2 \text{ est un multiple de 8.}$$

Écrire la négation N, la contraposée C et la réciproque R de l'implication I.

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}$ et on considère les ensembles $A = [4; 7]$, $B = \{x \in \mathbb{R},\ |x| \leq 5\}$ et $C = \mathbb{N}$.

Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants :

$$A \cup B\ ; \quad A \cap C; \quad \mathbb{R} \setminus B\ ; \quad A \cap \overline{C} \quad \text{et} \quad (A \cup B) \cap C.$$

Exercice 6. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 6x - 9$.

Exercice 7. Soit P la proposition suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Démontrer que la proposition P est fausse.

Exercice 8. Démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 9. Montrer que pour tout nombre réel x différent de -2, on a :

$$\frac{x+1}{x+2} \text{ différent de 1.}$$

Exercice 10. En raisonnant par contraposée, démontrer les propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 1 \Longrightarrow x > -1$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + x^2 - 2x < 0 \Longrightarrow x < 1$.

Exercice 11. Démontrer que pour tout entier naturel n, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Exercice 12. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n + 4 \end{cases}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exercice 13. Soit (u_n) la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}.$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2}{2n+1}$.