

## Feuille d'exercices n°9 - Correction

### Logique et ensembles

**Exercice 1.** Compléter, lorsque cela est possible, les pointillés par  $\Leftarrow, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  :

1.  $x^2 = 4 \quad \Leftarrow \quad x = 2$  ;
2.  $x \geq 1 \quad \Leftarrow \quad x \geq 2$  ;
3.  $x < 1 \quad \dots \quad x = 1$  ;
4.  $x + 3 \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1$  .

**Exercice 2.** On considère les quatre propositions suivantes :

- (a)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$  ; (b)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$  ;  
 (c)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$  ; (d)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$  .

1. Les propositions (a), (b), (c), (d) sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) proposition fausse      (b) proposition vraie  
 (c) proposition fausse      (d) proposition vraie

2. Nier chacune de ces propositions.

- (a)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$       (b)  $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$   
 (c)  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$       (d)  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 \leq x$

**Exercice 3.** Nier les assertions suivantes :

1. Tout triangle rectangle possède un angle droit.  
Il existe un triangle rectangle qui ne possède pas d'angle droit.
2. Dans toutes les prisons tous les détenus détestent tous les gardiens.  
Il existe une prison dans laquelle un détenu ne déteste pas tous les gardiens.

**Exercice 4.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On considère l'implication  $I$  définie par :

$$I : n \text{ est impair} \implies n^2 \text{ est un multiple de } 8.$$

Écrire la négation  $N$ , la contraposée  $C$  et la réciproque  $R$  de l'implication  $I$ .

- $N$  :  $n$  est impair ET  $n^2$  n'est pas un multiple de 8.  
 $C$  :  $n^2$  n'est pas un multiple de 8  $\implies n$  est pair.  
 $R$  :  $n^2$  est un multiple de 8  $\implies n$  est impair.

**Exercice 5.** On se place dans  $\mathbb{R}$  et on considère les ensembles  $A = [4; 7]$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq 5\}$  et  $C = \mathbb{N}$ .

Donner l'expression la plus simple possible pour chacun des ensembles suivants :

$$A \cup B ; A \cap C ; \mathbb{R} \setminus B ; A \cap \overline{C} \text{ et } (A \cup B) \cap C.$$

$$\begin{aligned} B &= [-5, 5] ; \\ A \cup B &= [-5, 7] ; \\ A \cap C &= \{4, 5, 6, 7\} = \llbracket 4, 7 \rrbracket ; \\ \mathbb{R} \setminus B &= ]-\infty, -5[ \cup ]5, +\infty[ ; \\ A \cap \overline{C} &= ]4, 5[ \cup ]5, 6[ \cup ]6, 7[ \\ \text{et } (A \cup B) \cap C &= \llbracket 0, 7 \rrbracket . \end{aligned}$$

**Exercice 6.** Démontrer que :  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 6x - 9$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} x^2 \geq 6x - 9 &\iff x^2 - 6x + 9 \geq 0 \\ &\iff (x - 3)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Le carré d'un réel étant toujours positif ou nul, on en déduit que  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 6x - 9$ .

**Exercice 7.** Soit  $P$  la proposition suivante :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Démontrer que la proposition  $P$  est fausse.

La proposition  $P$  est fausse car  $\sqrt{1+1} \neq \sqrt{1} + \sqrt{1}$ . En effet,  $\sqrt{2} \neq 2$ .

**Exercice 8.** Démontrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

Lemme :  $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair.

Démonstration : (Raisonnement par contraposée) Montrons que  $n$  impair  $\Rightarrow n^2$  impair. Si  $n = 2k + 1$ , alors  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$  est impair.

Montrons que  $\sqrt{2}$  est irrationnel. On procède par l'absurde, en supposant que  $\sqrt{2}$  est rationnel :

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}, \quad \text{où } p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux.}$$

En élevant au carré, on obtient  $p^2 = 2q^2$ .  $p^2$  est donc un nombre pair, ce qui entraîne que  $p$  est pair (lemme) et peut s'écrire  $p = 2k$  avec  $k$  entier. Alors  $(2k)^2 = 2q^2$ , c'est-à-dire  $2k^2 = q^2$ , donc  $q^2$  est pair et  $q$  est pair. On aboutit à une contradiction car  $p$  et  $q$  sont supposés premiers entre eux. Ainsi  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel.

**Exercice 9.** Montrer que pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-2$ , on a :

$$\frac{x+1}{x+2} \text{ différent de } 1.$$

Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ . On a

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x+2} = 1 & \iff x+1 = x+2 \\ & \iff 1 = 2. \end{aligned}$$

On en déduit que  $\frac{x+1}{x+2} \neq 1$  pour tout nombre réel  $x$  différent de  $-2$ .

**Exercice 10.** En raisonnant par contraposée, démontrer les propositions suivantes :

$$1. \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 < 1 \implies x > -1 \quad ;$$

$$2. \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + x^2 - 2x < 0 \implies x < 1.$$

Rappel : La contraposée de  $P \Rightarrow Q$  est  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ . On sait que  $P \Rightarrow Q$  est équivalent à  $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ .

1. Il s'agit de montrer que  $x \leq -1 \Rightarrow x^2 \geq 1$ .
2. Il s'agit de montrer que  $x \geq 1 \Rightarrow x^3 + x^2 - 2x \geq 0$ . On pensera à factoriser l'expression  $x^3 + x^2 - 2x$  par  $x$ . Si  $x \geq 1$ , alors  $x^3 + x^2 - 2x = \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{(x^2 + x - 2)}_{\geq 0 \text{ car } x \geq 1} \geq 0$ .

**Exercice 11.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3.

On distingue trois cas :

1. soit  $n = 3k$ ,
2. soit  $n = 3k + 1$ ,
3. soit  $n = 3k + 2$  avec  $k$  un entier.

1. Dans le premier cas,  $n(n+1)(n+2) = 3k(3k+1)(3k+2)$  est divisible par 3.
2. Dans le second cas,  $n(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = (3k+1)(3k+2) \times 3(k+1)$  est divisible par 3.
3. Dans le dernier cas,  $n(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+3)(3k+4) = (3k+2) \times 3(k+1)(3k+4)$  est divisible par 3.

Ainsi quel que soit l'entier naturel  $n$ ,  $n(n+1)(n+2)$  est divisible par 3.

**Exercice 12.** Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 5u_n + 4 \end{cases} .$$

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : u_n > 0$ .

Initialisation :  $\mathcal{P}_0$  est vraie car  $u_0 > 0$ .

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_n$  est vraie. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} > 0$ .

Par définition  $u_{n+1} = 5u_n + 4$ , donc  $u_{n+1} > 0$  car  $u_n > 0$ . D'où  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : On a démontré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 0$ .

**Exercice 13.** Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}.$$

Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2}{2n+1}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : u_n = \frac{2}{2n+1}$ .

Initialisation :  $\mathcal{P}_0$  est vraie car  $\frac{2}{2 \times 0 + 1} = 2 = u_0$ .

Hérédité : Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $\mathcal{P}_n$  est vraie. Montrons  $\mathcal{P}_{n+1}$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)+1}$ .

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + u_n} \text{ (définition de } (u_n)) \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{1 + \frac{2}{2n+1}} \text{ d'après } \mathcal{P}_n \\ &= \frac{\frac{2}{2n+1}}{\frac{2n+1}{2n+1} + \frac{2}{2n+1}} \\ &= \frac{2}{2n+3} \\ &= \frac{2}{2(n+1)+1}, \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : On a démontré par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{2}{2n+1}$ .

**Exercice 14.** Soit  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}_n : (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

Initialisation :  $(a+b)^0 = 1$  et  $\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$ ,

donc  $(a+b)^0 = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} a^k b^{0-k}$  et  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

Hérédité. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose  $\mathcal{P}_n$  vraie et on montre  $\mathcal{P}_{n+1}$ , c'est-à-dire

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

$$\begin{aligned} (a+b)^{n+1} &= (a+b) \times (a+b)^n \\ &= (a+b) \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \\ &= \sum_{K=1}^{n+1} \binom{n}{K-1} a^K b^{n-(K-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} \end{aligned}$$

(réindiciation  $k = K - 1$ )

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} + b^{n+1} \end{aligned}$$

(formule de Pascal)

$$\begin{aligned} &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^{(n+1)-(n+1)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie.

Conclusion : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$ .