Chapitre 10 : Équations différentielles

Un chapitre, un mathématicien

Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique. Catholique fervent, il est le fondateur de nombreuses œuvres charitables, dont l'Œuvre des Écoles d'Orient. Royaliste légitimiste, il s'exila volontairement lors de l'avènement de Louis-Philippe, après les Trois Glorieuses. Sa position politique et religieuse lui valut nombre d'oppositions.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques, quoique devancé par Leonhard Euler, avec près de 800 parutions et sept ouvrages ; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des séries et des séries entières. Ses travaux sur les permutations furent précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques au XIXe siècle. La négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel, perdant leurs manuscrits, a cependant entaché son prestige.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

1.1 Présentation

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Soient a, b deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$:

$$a : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & a(x) \end{array} \quad \text{et} \quad b : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & b(x) \end{array}.$$

Résoudre l'équation

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

signifie trouver toutes les fonctions f définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, dérivables et vérifiant

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

(E) est appelée équation différentielle linéaire (résolue ou normalisée) d'ordre 1.

différentielle : la dérivée apparaît

d'ordre 1 : dérivée $1^{\text{ère}}$

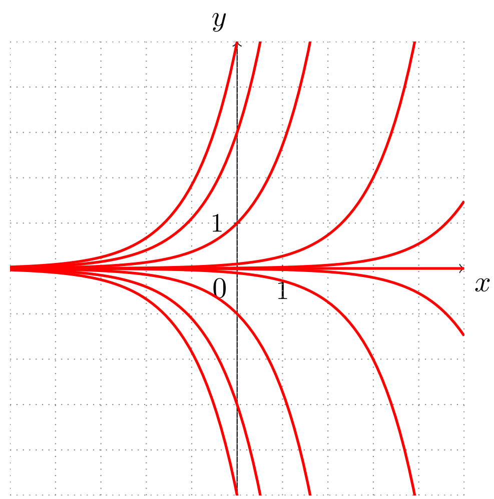
résolue/normalisée : le coefficient devant y' est égal à 1

On associe à (E) l'équation

$$y' + a(x)y = 0 \quad (H)$$

dite homogène.

Exemple 1. L'équation différentielle $y' - y = 0$ admet une infinité de fonctions solutions. Toute fonction du type $f(x) = C\mathrm{e}^x$, où C est une constante réelle, définie sur $\mathbb{R}$, est solution de cette équation différentielles.



$f(x) = C\mathrm{e}^x$, avec $C \in \{-5, -3, -1, -0.1, -0.01, 0, 0.01, 0.1, 1, 3, 5\}$

Exemple 2. L'équation

$$y' + 2xy = x \quad (E)$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre. L'équation homogène associée à (E) est :

$$y' + 2xy = 0 \quad (H)$$

Exemple 3. L'équation

$$(x^2 + 1)y\prime = 1 - xy \quad (E)$$

est une équation différentielle linéaire d'ordre 1, mais n'est pas de la forme annoncée. Elle n'est pas normalisée, car il y a ici une fonction de x en facteur de y', et les membres ne sont pas correctement organisés. L'équation différentielle (E) est équivalente à l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{x^2+1}y = \frac{1}{x^2+1}.$$

Exercice 1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-x} - \cos x + \sin x$ est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = 2\sin x \quad (E).$$

1.2 Propriétés de l'ensemble des solutions

Dans ce chapitre, nous utiliserons le résultat suivant :

Théorème. Toute fonction définie et continue sur un intervalle admet une primitive.

On appelle $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).

Théorème. Soit y_P une solution de (E).

$$\mathscr{S}_E = \{y_P + y_H,\ y_H \in \mathscr{S}_H\}.$$

Démonstration.

Théorème. (Principe de superposition) Soient b_1 et b_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On pose

$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= b_1(x) \qquad (E_1) \\ y' + a(x)y &= b_2(x) \qquad (E_2) \end{aligned}$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

Si y_1 est solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2), alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de

$$y' + a(x)y = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x).$$

Démonstration. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$. Soient y_1 une solution de (E_1) et y_2 une solution de (E_2). Alors pour tout $x \in I$,

$$y_1'(x) + a(x)y_1(x) = b_1(x) \quad \text{et} \quad y_2'(x) + a(x)y_2(x) = b_2(x).$$

Donc, pour tout $x \in I$, on a

$$\alpha\left(y_1'(x) + a(x)y_1(x)\right) + \beta\left(y_2'(x) + a(x)y_2(x)\right) = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x),$$

c'est-à-dire

$$(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x))' + a(x)\left(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)\right) = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x).$$

On en déduit que la fonction $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = \alpha b_1(x) + \beta b_2(x).$$

Remarque. Si y_H est une solution de (H), alors quel que soit $C \in \mathbb{K}$, la fonction $C \cdot y_H$ est aussi une solution de (H).

Exercice 2.

1. Montrer que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_1(x) = x\mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^x \quad (E_1)$.
2. Montrer que la fonction y_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_2(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation $y' - y = \mathrm{e}^{-x} \quad (E_2)$.
3. En déduire une solution de l'équation $y' - y = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \quad (E)$.

1.3 Méthode de résolution

Soient I un intervalle, a et b deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ continues. On considère

$$\begin{array}{lll} y' + a(x)y = b(x) & (E), & \text{d'ensemble de solutions } \mathscr{S}_E, \\ y' + a(x)y = 0 & (H), & \text{d'ensemble de solutions } \mathscr{S}_H. \end{array}$$

Théorème. Soit A une primitive de a.

$$\mathscr{S}_H = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & C\mathrm{e}^{-A(x)} \end{array}, \ C \in \mathbb{K} \right\}.$$

Démonstration.

Exercice 3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

$$y' + \sin(x)y = 0 \ (E_1) \quad \text{et} \quad (x^2+1)y' - 2xy = 0 \ (E_2).$$

Méthodologie : Méthode de la variation de la constante

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (E)$$

1. Équation homogène : On note (H) l'équation homogène associée :

$$y' + a(x)y = 0 \quad (H).$$

$$\boxed{y_H(x) = C\mathrm{e}^{-A(x)}}$$

2. Solution particulière : On pose

$$\boxed{y_P(x) = C(x)\mathrm{e}^{-A(x)}}.$$

$\boxed{y_P \text{ est une solution de } (E) \text{ si et seulement } C'(x) = b(x)\mathrm{e}^{A(x)}.}$ *** (à démontrer)

En déterminant une primitive de $x \mapsto b(x)\mathrm{e}^{A(x)}$, on en déduit l'expression d'une solution particulière de (E).

3. Solution générale :

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x)$$

4. Conclusion :

$$\boxed{\mathscr{S}_E = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & y_P(x) + y_H(x) \end{array}, \ C \in \mathbb{K} \right\}.}$$

Remarque. Si a et b sont des constantes, on cherche une solution particulière constante $y_P = K$ sans utiliser la méthode de la variation de la constante.

Exercice 4. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + 2y = \mathrm{e}^{-x}$ (E).

Définition. (Problème de Cauchy) Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

On appelle problème de Cauchy tout système de la forme

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \quad (E) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

La condition $y(x_0) = y_0$ est appelée condition initiale. Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est dite solution de ce problème de Cauchy si et seulement si φ est dérivable et

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ \varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

Théorème. (Existence et unicité – Problème de Cauchy)

Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.

Tout problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \quad (E) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

admet une unique solution.

Exemple.

1. Représenter l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0 \quad (E)$.

2. Représenter en rouge le graphe de l'unique solution f de (E) qui vérifie $f(2) = 3$.

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + 2y = \mathrm{e}^{-x} \quad (E) \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

2.1 Présentation

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^\star \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$.

Résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E)$$

signifie trouver toutes les fonctions φ définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, deux fois dérivables, telles que

$$\text{pour tout } x \in I,\ a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x) = f(x).$$

(E) est appelée équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On associe à (E) une équation dite homogène :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (H)$$

Remarque. Attention : Si a est une constante paramétrée, il faut distinguer deux cas suivant que cette constante est nulle ou pas pour résoudre l'équation.

Exemple. L'équation

$$y'' + y' - 2y = x^2 \quad (E)$$

est une équation différentielle du second ordre à coefficients constants définie sur $\mathbb{R}$. L'équation homogène associée à (E) est :

$$y'' + y' - 2y = 0 \quad (H).$$

Exercice 6. Montrer que la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \cos(x) + x$ est une solution de l'équation $y'' + y = x \quad (E)$.

On appelle $\mathscr{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathscr{S}_H$ l'ensemble des solutions de (H).

Théorème. Soit y_P une solution de (E).

$$\mathscr{S}_E = \{y_P + y_H,\ y_H \in \mathscr{S}_H\}.$$

Théorème. (Principe de superposition) Soient f_1 et f_2 deux fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On note

$$\begin{array}{ll} ay'' + by' + cy = f_1(x) & \quad (E_1) \\ ay'' + by' + cy = f_2(x) & \quad (E_2) \end{array}$$

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

Si y_1 est solution de (E_1) et si y_2 est une solution de (E_2), alors $\alpha y_1 + \beta y_2$ est solution de

$$ay'' + by' + cy = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x).$$

Exercice 7.

1. Vérifier que la fonction y_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ est une solution de l'équation $y'' + y = 2\mathrm{e}^x$ (E_1).
2. Vérifier que la fonction y_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ est une solution de l'équation $y'' + y = 2\mathrm{e}^{-x}$ (E_2).
3. En déduire une solution de l'équation $y'' + y = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ (E).

2.2 Résolution de (H)

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (H)$$

On introduit la fonction polynomiale $P(x) = ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de P.

Résolution de (H) dans $\mathbb{R}$ - Solutions réelles de (H)

Δ	Racines de P	Forme des solutions de (H)
$\Delta > 0$	P admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2	$y_H(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta = 0$	P admet une unique racine réelle r_0	$y_H(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{r_0 x}$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
$\Delta < 0$	P admet deux racines complexes conjuguées $r \pm i\omega$	$y_H(x) = \mathrm{e}^{rx}\left(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)\right)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Résolution de (H) dans $\mathbb{C}$ - Solutions complexes de (H)

Δ	Racines de P	Forme des solutions de (H)
$\Delta \neq 0$	P admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2	$y_H(x) = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x}, \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$
$\Delta = 0$	P admet une unique racine complexe r_0	$y_H(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{r_0 x}, \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$

Exercice 8. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles :

1. $y'' - y = 0$,
2. $y'' + 2y' + y = 0$,
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Définition. (Problème de Cauchy) Soient $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. On appelle <u>problème de Cauchy</u> tout système de la forme

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}.$$

Une fonction $\varphi : I \to \mathbb{K}$ est dite solution de ce problème de Cauchy si et seulement si φ est deux fois dérivable et

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in I,\ a\varphi''(x) + b\varphi'(x) + c\varphi(x) = f(x) \\ \varphi(x_0) = y_0 \\ \varphi'(x_0) = y_1 \end{cases}.$$

Théorème. (Existence et unicité – Problème de Cauchy) Soient $x_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$.
Tout problème de Cauchy de la forme

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution.

Exercice 9. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y'(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}.$$

2.3 Étude de (E) dans le cas d'un second membre de la forme $Q\mathrm{e}^{\gamma x}$

Théorème. On considère l'équation

$$ay'' + by' + cy = f(x) \quad (E).$$

On note $P(X) = aX^2 + bX + c$, le polynôme caractéristique associé à (E).

Si $f(x) = Q\mathrm{e}^{\gamma x}$, avec Q et γ des constantes, on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$ay'' + by' + cy = Q\mathrm{e}^{\gamma x} \quad (E)$$

sous la forme

$$y_P(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{\gamma x} & \text{si } \gamma \text{ n'est pas une racine de } P, \\ Cx\mathrm{e}^{\gamma x} & \text{si } \gamma \text{ est une racine simple de } P, \\ Cx^2\mathrm{e}^{\gamma x} & \text{si } \gamma \text{ est une racine double de } P, \end{cases}$$

avec C une constante à déterminer.

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles

1. $y'' + y = \mathrm{e}^{2x} \quad (E_1)$,
2. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{x} \quad (E_2)$.
3. $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x} \quad (E_3)$.