

Chapitre 11 : Géométrie élémentaire de l'espace

Dans ce chapitre, on notera \mathcal{E} l'ensemble des points de l'espace et $\vec{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de l'espace

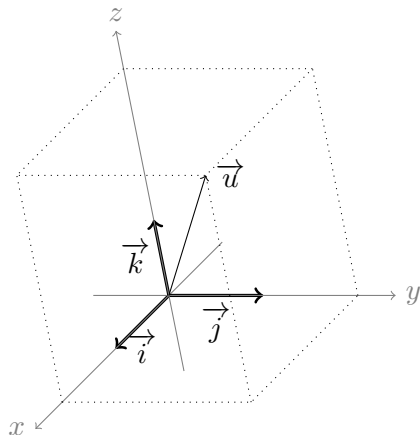
1 Repérage dans l'espace

1.1 Repère cartésien

Définition. (Base de $\vec{\mathcal{E}}$) On dit que trois vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ de $\vec{\mathcal{E}}$ constituent une *base de $\vec{\mathcal{E}}$* si et seulement si pour tout vecteur \vec{u} de $\vec{\mathcal{E}}$, il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

On appelle coordonnées de \vec{u} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le triplet (x, y, z) .

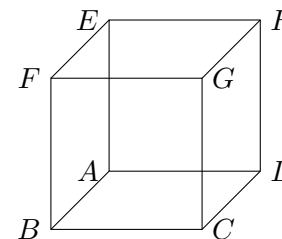


Définition. (Repère cartésien) Un *repère cartésien de \mathcal{E}* est la donnée d'un point O appelé *origine du repère* et d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\vec{\mathcal{E}}$. On note le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors $\vec{OM} \in \vec{\mathcal{E}}$ et il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le triplet (x, y, z) est appelé coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Exercice 1. Soit $ABCDEFGH$ un cube de côté 1. Déterminer les coordonnées des sommets de ce cube dans le repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

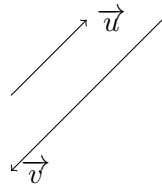


1.2 Recherche des repères de \mathcal{E}

Vecteurs colinéaires et coplanaires.

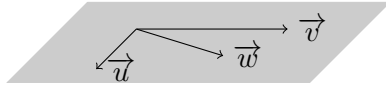
Définition. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de $\vec{\mathcal{E}}$ sont dits *colinéaires* s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{u} = k\vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k\vec{u}.$$



Trois vecteurs \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} de $\vec{\mathcal{E}}$ sont dits *coplanaires* s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ non tous nuls tels que

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}.$$



Remarque. Deux vecteurs sont colinéaires si leurs coordonnées sont proportionnelles (ex : (1, 2, 3) et (2, 4, 6)).

Trois vecteurs sont coplanaires s'il est possible d'exprimer l'un d'entre eux comme combinaison linéaire des deux autres.

Caractérisations des bases de \mathcal{E} .

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$ tel que

$$\begin{array}{l} \vec{u} \quad (u_1, u_2, u_3) \\ \vec{v} \quad (v_1, v_2, v_3) \\ \vec{w} \quad (w_1, w_2, w_3) \end{array} \quad \text{dans } (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}).$$

On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on note

$\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Théorème. Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$.

$$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont coplanaires} \iff \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0.$$

Théorème. Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base de } \vec{\mathcal{E}} \iff \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$$

$$\iff \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ ne sont pas coplanaires.}$$

Exercice 2. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\vec{\mathcal{E}}$. On pose $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$. La famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ constitue-t-elle une base de $\vec{\mathcal{E}}$?

Espace - Objets géométriques	\mathbb{R}^3 - Objets analytiques	Notations dans \mathbb{R}^3
Point M	Coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	(x, y, z)
Vecteur \vec{u}	Coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	(u_1, u_2, u_3)
Vecteur \overrightarrow{AB}	Coordonnées dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	$(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$
Sphère de centre O et de rayon 1	Ensemble de triplets de \mathbb{R}^3	$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
Translation t de vecteur $\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$	Expression analytique	$t : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 1, y - 1, z + 2) \end{array}$

Identification de l'espace avec \mathbb{R}^3

1.3 Orientation. Repère orthogonal. Repère orthonormal.

Orientation de l'espace.

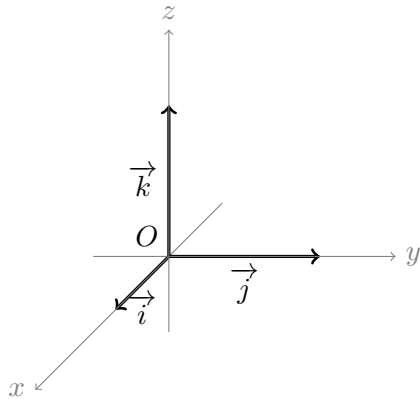
Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de \vec{E} .

Une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de \vec{E} est dite *de même orientation* que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si et seulement si $\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) > 0$.

Une base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de \vec{E} est dite *d'orientation contraire* à $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ si et seulement si $\det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) < 0$.

Orienter \vec{E} revient à choisir une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Toute base de même orientation que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite *directe* et toute autre base est dite *indirecte*.

Il n'existe aucun critère mathématique pour privilégier une orientation plutôt qu'une autre; ce choix ne peut être qu'arbitraire. En général, on convient de dire que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct si lorsque l'on tourne de \vec{i} vers \vec{j} , on progresse dans le sens de \vec{k} (Règle des trois doigts de la main droite). Ces conventions sont utilisées en physique.

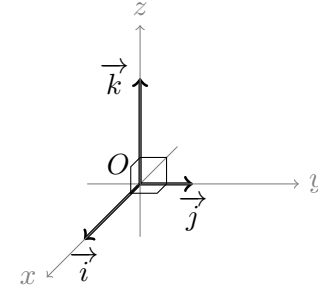


Repère orthogonal.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une *base orthogonale* de \vec{E} si et seulement si :

$$\begin{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base,} \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{j} \perp \vec{k}. \end{cases}$$

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit *orthogonal* si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthogonale de \vec{E} .

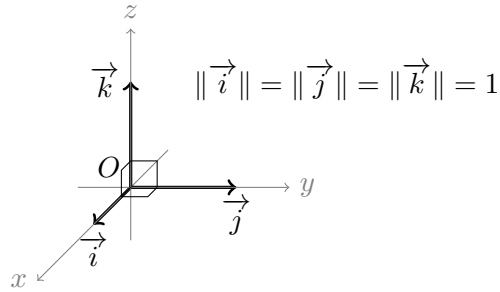


Repère orthonormé.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une *base orthonormale* de \vec{E} si et seulement si :

$$\begin{cases} (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \text{ est une base,} \\ \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1, \\ \vec{i} \perp \vec{j}, \quad \vec{i} \perp \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{j} \perp \vec{k}. \end{cases}$$

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit *orthonormal* si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale de \vec{E} .



2 Produit scalaire

On travaille à présent dans un espace orienté. On munit \mathcal{E} d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$. On appelle produit scalaire de \vec{u} et \vec{v} et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de \vec{u} et de \vec{v} calculé dans un plan contenant \vec{u} et \vec{v} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v}) & \text{si } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ et } \vec{v} \neq \vec{0}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition. (1) Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{E}$,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

(2) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ si et seulement si } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

(3) Symétrie du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(4) Bilinearité du produit scalaire :

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} &= \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) &= \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned}$$

Proposition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$ de coordonnées $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, base orthonormée directe. On a

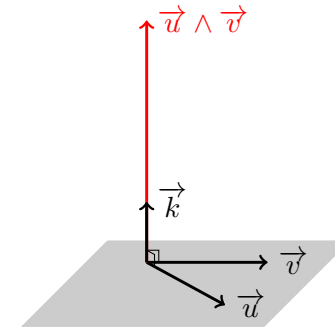
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'.$$

En particulier $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3 Produit vectoriel dans l'espace orienté

Définition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{E}^2$. On appelle produit vectoriel de \vec{u} et \vec{v} et on note $\vec{u} \wedge \vec{v}$, le vecteur :

- nul si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires,
- égal à $\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}, \vec{v})| \times \vec{k}$,
où \vec{k} est le vecteur unitaire « directement orthogonal à (\vec{u}, \vec{v}) », c'est-à-dire tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ constitue une base directe de \mathcal{E} , sinon.



Remarque. Pour tout $\vec{u} \in \mathcal{E}$, $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Exercice 3. Déterminer $\vec{i} \wedge \vec{j}$, $\vec{i} \wedge \vec{k}$, $\vec{k} \wedge \vec{j}$ et $2\vec{j} \wedge 3\vec{i}$.

Proposition. (1) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$,

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires} \iff \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}.$$

(2) Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est orthogonal à \vec{u} et à \vec{v} . En particulier :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0.$$

(3) Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ tel que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$. Alors $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ est une base orthonormale directe de $\vec{\mathcal{E}}$.

Proposition. Antisymétrie du produit vectoriel : Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$,

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

Bilinéarité du produit vectoriel : Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{u}) \wedge \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) & \text{et} & & (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} &= \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ \vec{u} \wedge (\lambda \vec{v}) &= \lambda(\vec{u} \wedge \vec{v}) & \text{et} & & \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Déterminer le produit vectoriel des vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$.

Proposition. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ de coordonnées respectives (u_1, u_2, u_3) et (v_1, v_2, v_3) dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (orthonormée directe). Alors :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}.$$

Les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont donc
$$\begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}.$$

4 Produit mixte dans l'espace orienté

Définition. L'espace étant orienté, on appelle *produit mixte* ou *déterminant des vecteurs* \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , et on note $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ le réel :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Remarque : Cette définition dépend de l'orientation de l'espace fixée.

Exercice 5. Déterminer $[\vec{i}, \vec{j}, 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}]$.

On remarque que :

$$\begin{aligned} [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0 & \text{ si et seulement si } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 \\ & \text{ si et seulement si } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \perp \vec{w} \\ & \text{ si et seulement si } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.} \end{aligned}$$

Proposition. Les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont coplanaires si et seulement si

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0.$$

Proposition. Antisymétrie du produit mixte : Le produit mixte de trois vecteurs est changé en son opposé lorsqu'on échange deux vecteurs.

Par exemple,

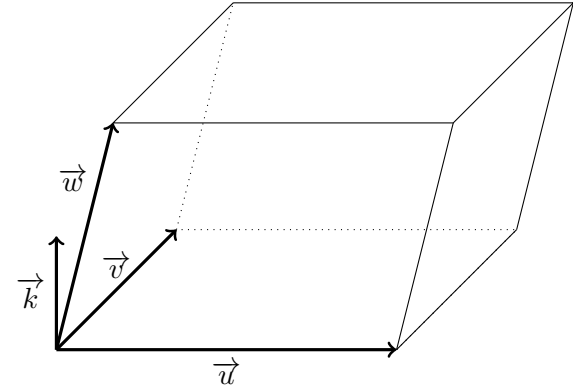
$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = -[\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}].$$

Trilinéarité du produit mixte : Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) \in \mathcal{E}^4$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} [\lambda \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] &= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], & [\vec{u} + \vec{z}, \vec{v}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{z}, \vec{v}, \vec{w}], \\ [\vec{u}, \lambda \vec{v}, \vec{w}] &= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], & [\vec{u}, \vec{v} + \vec{z}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{z}, \vec{w}], \\ [\vec{u}, \vec{v}, \lambda \vec{w}] &= \lambda [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], & [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{z}] &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}]. \end{aligned}$$

Interprétation géométrique du produit mixte :

$$|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]| = \text{volume du parallélépipède engendré par } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}.$$



Démonstration.

Expression du produit mixte dans une base orthonormale directe :

Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \vec{\mathcal{E}}^3$ de coordonnées $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w}(w_1, w_2, w_3)$ dans $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Le déterminant de la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est indépendant de la base orthonormée directe choisie.

Démonstration.

5 Plans et droites de \mathcal{E}

\mathcal{E} est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans la suite, les coordonnées des points de \mathcal{E} sont données dans le repère \mathcal{R} , et celles des vecteurs de $\vec{\mathcal{E}}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5.1 Plans de \mathcal{E}

A. Définition

Définition. Soit \mathcal{P} une partie de \mathcal{E} . On dit que \mathcal{P} est un *plan de \mathcal{E}* si et seulement s'il existe $A \in \mathcal{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ non colinéaires tels que \mathcal{P} est l'ensemble des points M vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont appelés *vecteurs générateurs de \mathcal{P}* .

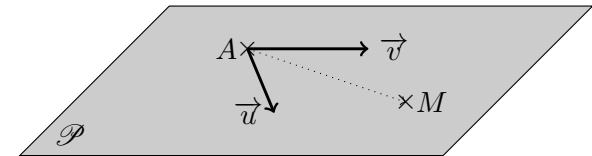
Il existe différents modes de définition d'un plan :

1. Un point et deux vecteurs non colinéaires définissent un plan :

Soit $A \in \mathcal{E}$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{E}}^2$ non colinéaires.

Le plan \mathcal{P} passant par le point A et engendré par les vecteurs \vec{u} et \vec{v} est l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} , \vec{u} et \vec{v} sont coplanaires :

$$[\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{v}] = 0.$$

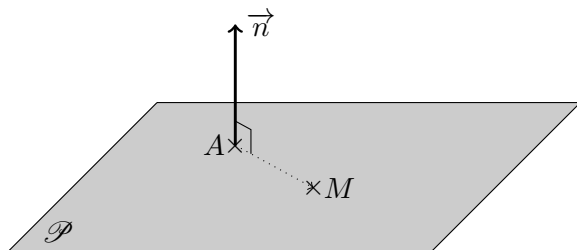


2. Un point et un vecteur normal définissent un plan :

Soit $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{n} \in \vec{\mathcal{E}}$ non nul.

Le plan \mathcal{P} passant par le point A et orthogonal à \vec{n} est l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0.$$

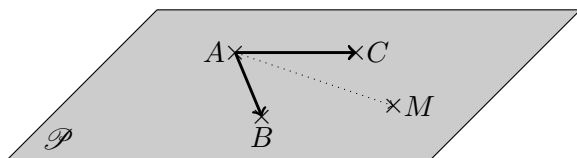


3. Trois points non alignés définissent un plan :

Soient $A, B, C \in \mathcal{E}$ non alignés.

Le plan \mathcal{P} contenant les points A, B et C , aussi noté (ABC) , est l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que les vecteurs \overrightarrow{AM} , \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont coplanaires :

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0.$$



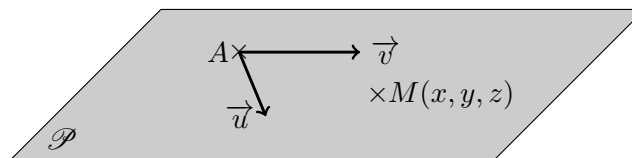
B. Représentation paramétrique d'un plan de \mathcal{E}

Proposition. Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point de \mathcal{E} et \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs non colinéaires, tels que $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$.

Le plan \mathcal{P} passant par A et engendré par \vec{u} et \vec{v} admet comme **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = x_A + u_1\lambda + v_1\mu \\ y = y_A + u_2\lambda + v_2\mu \\ z = z_A + u_3\lambda + v_3\mu \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente un plan \mathcal{P} de \mathcal{E} , dont on connaît un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et deux vecteurs générateurs : $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.



Exemple. Le système

$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda + \mu \\ y = \lambda - \mu \\ z = 2 + \mu \end{cases} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,$$

est une représentation paramétrique du plan ...

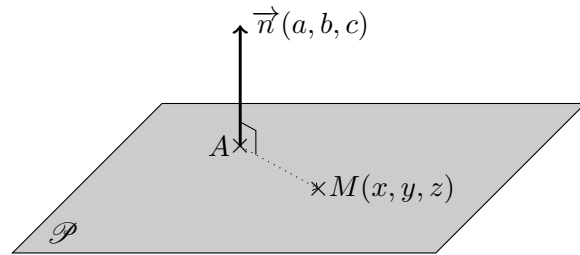
C. Équation cartésienne d'un plan de \mathcal{E}

Proposition. Soit $\vec{n} = (a, b, c)$ un vecteur non nul.

Si \mathcal{P} est un plan de \mathcal{E} orthogonal à \vec{n} , alors il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que

$$ax + by + cz + d = 0$$

soit une équation cartésienne de \mathcal{P} dans \mathcal{R} . Réciproquement : soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble des points de \mathcal{E} dont une équation est $ax + by + cz + d = 0$ est un plan orthogonal au vecteur $\vec{n} = (a, b, c)$.



Exercice 6. Déterminer une équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par le point $A = (1, 0, -2)$, orthogonal à $\vec{n} = (1, 2, 3)$.

D. Méthodologie : « Passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne »

On note \mathcal{P} le plan dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = -1 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 + 3\lambda \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Déterminer une équation cartésienne de \mathcal{P} .

E. Méthodologie : « Passer d'une équation cartésienne à une représentation paramétrique »

Déterminer une représentation paramétrique du plan \mathcal{P} dont une équation cartésienne est $2x - y + z = 3$ dans \mathcal{R} .

F. Position relative de deux plans

Soit $(\vec{n}, \vec{n}') \in \mathcal{E}^2$ non nuls. Soient \mathcal{P} et \mathcal{P}' deux plans de \mathcal{E} tels que \mathcal{P} orthogonal à \vec{n} et \mathcal{P}' orthogonal à \vec{n}' .

Définition. Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont *parallèles* si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont colinéaires, si et seulement si

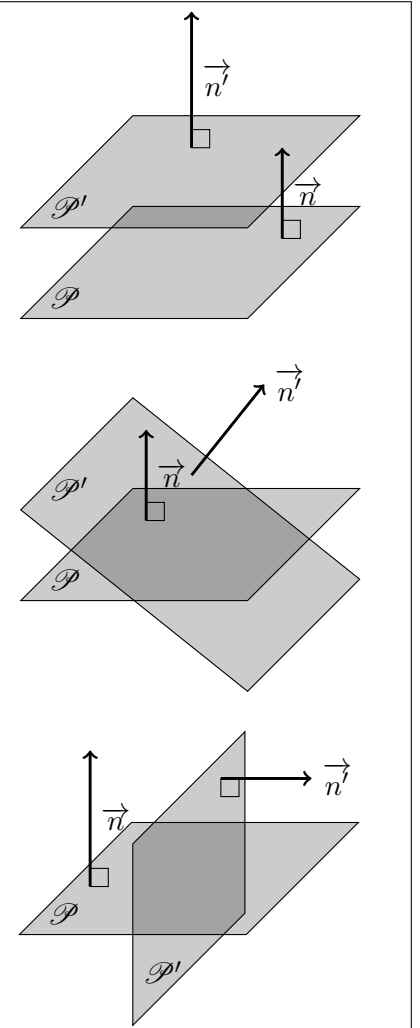
$$\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}.$$

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont *sécants* si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' ne sont pas colinéaires, si et seulement si

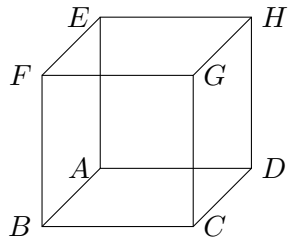
$$\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq \vec{0}.$$

Les plans \mathcal{P} et \mathcal{P}' sont *perpendiculaires* si et seulement si \vec{n} et \vec{n}' sont orthogonaux, si et seulement si

$$\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0.$$



Exemple. Soit $ABCDEFGH$ un cube. Les plans (ABC) et (FGH) sont parallèles. Les plans (EFG) et (BGH) sont sécants et leur intersection est la droite (GH) . Les plans (ABC) et (DGH) sont perpendiculaires.



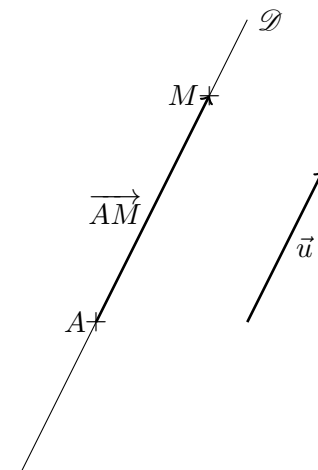
Proposition. L'intersection de deux plans de \mathcal{E} est soit vide, soit une droite, soit un plan (s'ils sont confondus).

5.2 Droites de \mathcal{E}

Définition. Soit \mathcal{D} une partie de \mathcal{E} . On dit que \mathcal{D} est une droite si et seulement si il existe $A \in \mathcal{E}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}} \setminus \{\vec{0}\}$ tels que \mathcal{D} est l'ensemble des points M de \mathcal{E} vérifiant

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, \mathcal{D} est la droite passant par A et dirigée par \vec{u} .



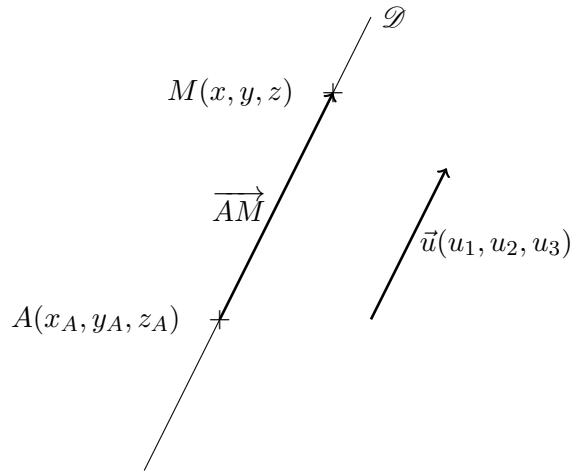
A. Représentation paramétrique d'une droite de \mathcal{E}

Proposition. Soient $A = (x_A, y_A, z_A)$ un point de \mathcal{E} et $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ un vecteur non nul.

La droite \mathcal{D} passant par A et dirigée par \vec{u} admet comme **représentation paramétrique** :

$$\begin{cases} x = x_A + u_1 t \\ y = y_A + u_2 t \\ z = z_A + u_3 t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente une droite de \mathcal{E} , dont on connaît un point $A = (x_A, y_A, z_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$.



B. Système d'équations cartésiennes d'une droite

Proposition. Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} . Il existe $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $(a', b', c', d') \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ et $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, tels que

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

soit un système d'équations cartésiennes de \mathcal{D} dans \mathcal{R} .

C. Méthodologie : « Passer d'une représentation paramétrique à un système d'équations cartésiennes d'une droite »

Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite \mathcal{D} passant par $A = (1, -1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

D. Méthodologie : « Passer d'un système d'équations cartésiennes à une représentation paramétrique d'une droite »

Déterminer une représentation paramétrique de la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ 3x - z = 2 \end{cases} .$$

E. Position relative

POSITION RELATIVE DE DEUX DROITES

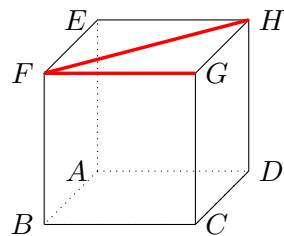
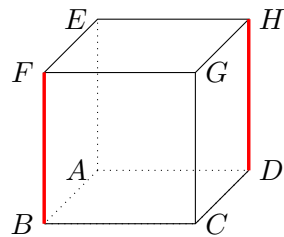
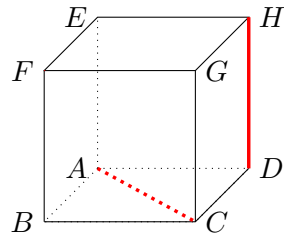
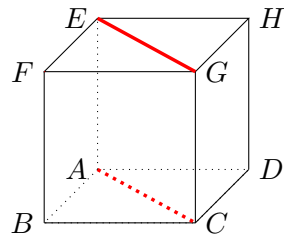
On note \mathcal{D} la droite passant par A et dirigée par \vec{u} non nul, et \mathcal{D}' la droite passant par A' et dirigée par \vec{u}' non nul.

Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont :

- soit *coplanaires* (si $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}'] = 0$),
- soit *non coplanaires* (si $[\overrightarrow{AA'}, \vec{u}, \vec{u}'] \neq 0$).

Si \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont coplanaires, alors elles sont :

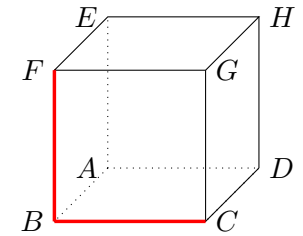
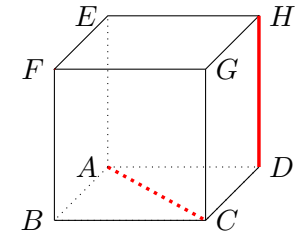
- soit *parallèles* (si $\vec{u} \wedge \vec{u}' = \vec{0}$),
- soit *sécantes* (si $\vec{u} \wedge \vec{u}' \neq \vec{0}$).



Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont dites *orthogonales* si et seulement si \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonaux, si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0.$$

Elles sont dites *perpendiculaires* si elles sont sécantes et orthogonales.



Remarque. Deux droites perpendiculaires sont orthogonales, mais la réciproque est fautive.

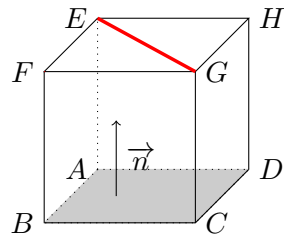
Proposition. L'intersection de deux droites de \mathcal{E} est soit vide, soit un point, soit une droite (si elles sont confondues).

POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Soient \mathcal{D} une droite de \mathcal{E} de vecteur directeur \vec{u} non nul et \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} orthogonal à \vec{n} non nul.

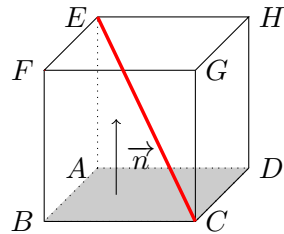
La droite \mathcal{D} est *parallèle* au plan \mathcal{P} si et seulement si $\vec{u} \perp \vec{n}$, si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0.$$



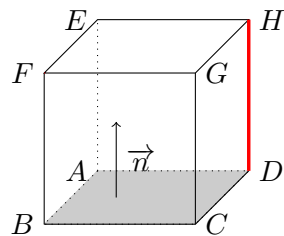
La droite \mathcal{D} est *sécante* au plan \mathcal{P} si et seulement si

$$\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0.$$



La droite \mathcal{D} est *perpendiculaire* au plan \mathcal{P} si et seulement si \vec{u} et \vec{n} sont colinéaires, si et seulement si

$$\vec{u} \wedge \vec{n} = \vec{0}.$$



Proposition. L'intersection d'une droite et d'un plan de \mathcal{E} est soit vide, soit un point, soit une droite.

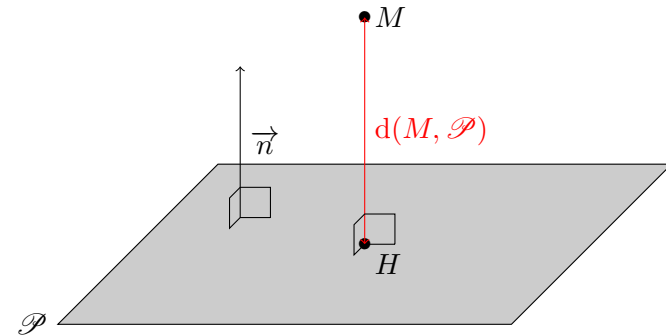
5.3 Distances et projetés orthogonaux

A. Distance d'un point à un plan de \mathcal{E}

Définition. Soient \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} et M un point de \mathcal{E} . On appelle *distance du point M au plan \mathcal{P}* et on note $d(M, \mathcal{P})$ la plus petite distance entre M et un point de \mathcal{P} . Le théorème de Pythagore assure que

$$d(M, \mathcal{P}) = MH,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{P} .



Théorème. Soient \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et $M = (x_M, y_M, z_M)$ un point de \mathcal{E} . Alors :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Exemple. Déterminer la distance du point $M = (1, 2, 3)$ au plan $\mathcal{P} : x + 2z - 5 = 0$.

B. Méthodologie : « Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur un plan »

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point $M = (1, 2, 3)$ sur le plan $\mathcal{P} : x + 2z - 5 = 0$.

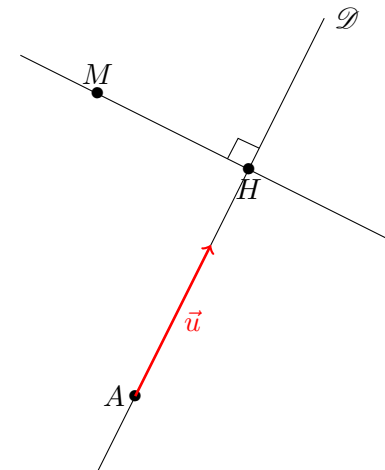
C. Distance d'un point à une droite de \mathcal{E}

On considère la droite \mathcal{D} de \mathcal{E} passant par A et dirigée par \vec{u} non nul.

Soit $M \in \mathcal{E}$. On rappelle que la distance du point M à la droite \mathcal{D} , notée $d(M, \mathcal{D})$, est la plus petite distance entre M et un point de \mathcal{D} et donc que

$$d(M, \mathcal{D}) = MH,$$

où H est le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} .



On a $\vec{AM} = \vec{AH} + \vec{HM}$. Donc $\vec{AM} \wedge \vec{u} = (\vec{AH} + \vec{HM}) \wedge \vec{u} = \vec{HM} \wedge \vec{u}$ et $\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{HM}\| \|\vec{u}\|$. D'où

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{\|\vec{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

Exemple. Déterminer la distance du point $M = (1, 0, 1)$ à la droite \mathcal{D} passant par $A = (1, -1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

D. Méthodologie : « Déterminer le projeté orthogonal d'un point sur une droite »

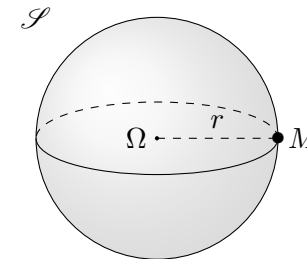
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $M = (1, 0, 1)$ sur la droite \mathcal{D} passant par $A = (1, -1, 1)$ et dirigée par $\vec{u} = (1, 2, 3)$.

6 Sphères

\mathcal{E} est muni d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition. Soient $\Omega \in \mathcal{E}$ et r un réel strictement positif. On appelle *sphère de centre Ω et de rayon r* l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que

$$\Omega M = r.$$



6.1 Équation cartésienne d'une sphère

Proposition. Soient $\Omega \in \mathcal{E}$ et r un réel strictement positif. On note (a, b, c) les coordonnées de Ω dans \mathcal{R} . Une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} de centre Ω et de rayon r est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Proposition. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On note \mathcal{A} l'ensemble d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0.$$

Alors \mathcal{A} est une sphère, un point ou le vide.

Exercice 7. Décrire l'ensemble \mathcal{A} des points de \mathcal{E} dont une équation cartésienne est :

1. $\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 20 = 0.$

2. $\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2z + 3 = 0.$

3. $\mathcal{A} : x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + \frac{5}{2} = 0.$

6.2 Sphère définie par son diamètre

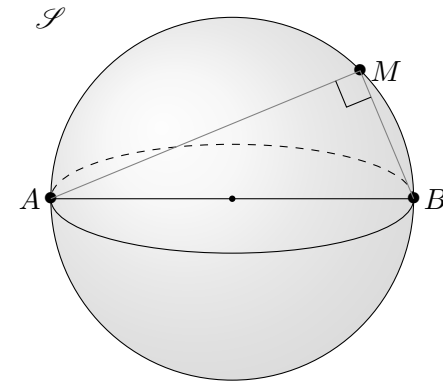
Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points distincts de \mathcal{E} .

Proposition. On considère \mathcal{S} la sphère de diamètre $[AB]$. Soit $M \in \mathcal{E}$:

$$M \in \mathcal{S} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} est donc

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0.$$



Exemple. Soient A et B deux points de \mathcal{E} de coordonnées $(0, -1, 1)$ et $(-2, 1, 1)$. Déterminer une équation cartésienne de la sphère \mathcal{S} de diamètre $[AB]$.

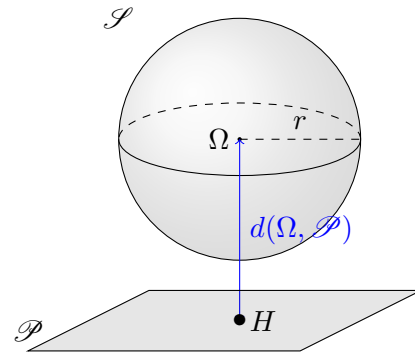
6.3 Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition. Soient $\Omega \in \mathcal{E}$ et $r > 0$. On appelle \mathcal{S} la sphère de centre Ω et de rayon r . Soit \mathcal{P} un plan de \mathcal{E} .

On note H le projeté du point Ω sur le plan \mathcal{P} .

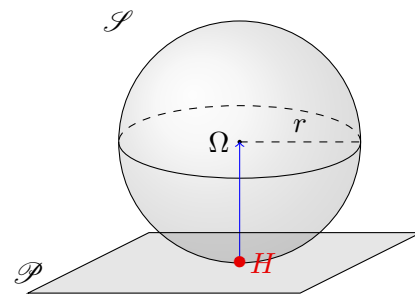
Si $d(\Omega, \mathcal{P}) > r$, alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \emptyset ;$$



Si $d(\Omega, \mathcal{P}) = r$, alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \{H\}$$



où H est le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{P} .

Si $d(\Omega, \mathcal{P}) < r$, alors

$$\mathcal{S} \cap \mathcal{P} = \mathcal{C},$$

où \mathcal{C} est le cercle inclus dans \mathcal{P} de centre H et de rayon $\sqrt{r^2 - d(\Omega, \mathcal{P})^2}$.

