

Chapitre 13 : Nombres réels

1 Ensembles usuels de nombres

On travaille en mathématiques avec différents ensembles de nombres :

- l'ensemble des **entiers naturels**, noté \mathbb{N} :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- l'ensemble des **entiers relatifs**, noté \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

- l'ensemble des **décimaux**, noté \mathbb{D} .

Un nombre décimal est le quotient d'une entier relatif par une puissance de 10 :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{p}{10^n}, p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Remarque. Les nombres décimaux ont une écriture décimale finie.

- l'ensemble des **rationnels**, noté \mathbb{Q} .

Un nombre rationnel est le quotient de deux entiers :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

- l'ensemble des **réels**, noté \mathbb{R} , représenté par l'ensemble des points d'une droite orientée munie d'une origine et d'une unité.

L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des réels qui ne sont pas rationnels, est appelé ensemble des **irrationnels**. Parmi eux, on trouve π ou $\sqrt{2}$.

On a :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

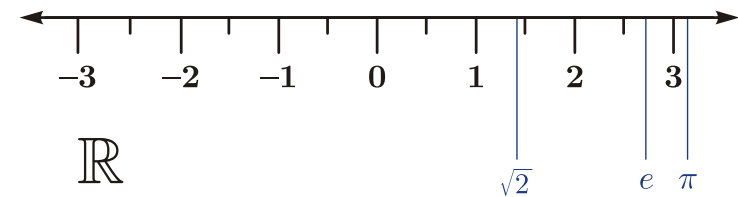


FIGURE 1 – Droite réelle

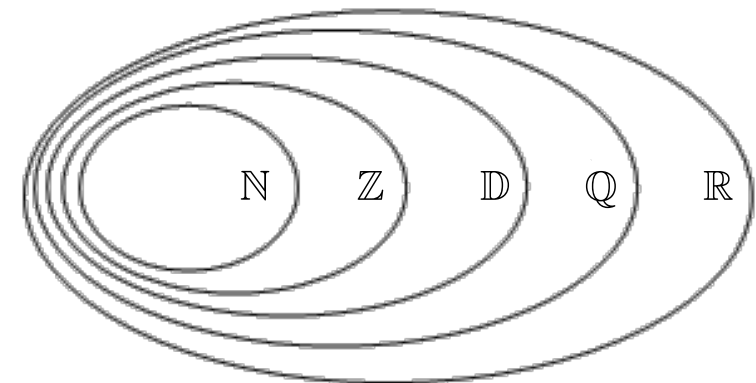


FIGURE 2 – Ensembles usuels de nombres

2 Relation d'ordre sur \mathbb{R}

La comparaison des réels possède les propriétés suivantes :

- **Réflexivité** : Pour tout réel x , $x \leq x$.

- **Antisymétrie** : Pour tous réels x et y ,

$$(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y.$$

- **Transitivité** : Pour tous réels x , y et z ,

$$(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z.$$

On dit que \leq est une **relation d'ordre**.

Elle permet de comparer deux réels quelconques : pour tous réels x et y , on a nécessairement $x \leq y$ ou $y \leq x$. On dit que l'ordre est **total**.

De plus, l'ordre est **compatible** avec :

- l'addition : Pour tous réels x , y et z ,

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

- la multiplication par les réels positifs :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \quad \forall z \in \mathbb{R}^+ \quad x \leq y \Rightarrow xz \leq yz.$$

Remarque. Plus généralement, on peut ajouter membre à membre deux inégalités :

$$\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad (a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow a + c \leq b + d,$$

mais jamais les soustraire membre à membre ! On peut également multiplier membre à membre deux inégalités entre réels positifs :

$$\forall (a, b, c, d) \in (\mathbb{R}^+)^4 \quad (a \leq b \text{ et } c \leq d) \Rightarrow ac \leq bd.$$

3 Vocabulaire

A. Majorant, minorant

Définition 1. (Majorant - Minorant) Soit A une partie non vide de \mathbb{R} . La partie A est dite **majorée**, s'il existe un réel M tel que tout élément x de A soit inférieur ou égal à M :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M.$$

Le réel M est alors appelé **majorant** de A .

La partie A est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que tout élément x de A soit supérieur ou égal à m :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \geq m.$$

Le réel m est alors appelé **minorant** de A .

La partie A est dite **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée :

$$\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in A, m \leq x \leq M.$$

Remarque. Un majorant (respectivement un minorant) n'est pas unique.

- Exemple.**
- La partie $[0, 1]$ possède par exemple comme majorants 2 et 3 et comme minorants -1 et 0 .
 - La partie $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 9\}$ admet par exemple 5 comme majorant.

Exercice 1. On considère l'ensemble $E = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in]0; 1] \right\}$. Montrer que E est une partie bornée de \mathbb{R} .

B. Plus petit élément, plus grand élément

Définition 2. (Maximum - Minimum) Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

Un élément de A est appelé **maximum** ou **plus grand élément** de A , et noté $\max(A)$, s'il appartient à A et est supérieur à tout autre élément de A :

$$\max(A) \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \leq \max(A).$$

Un élément de A est appelé **minimum** ou **plus petit élément** de A , et noté $\min(A)$, s'il appartient à A et est inférieur à tout autre élément de A :

$$\min(A) \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A, x \geq \min(A).$$

Remarque. Une partie non vide de \mathbb{R} n'admet pas nécessairement un plus petit ou un plus grand élément.

Exemple. • \mathbb{N} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} n'ont pas de plus grand élément.

- \mathbb{N} possède un plus petit élément (0) mais pas \mathbb{Q} ni \mathbb{R} .
- $]0, 1]$ possède un plus grand élément, 1, et un plus petit élément, 0.
- $]0, 1[$ ne possède ni plus grand ni plus petit élément.
- $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$ ne possède pas de plus grand élément, mais $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$ en possède un (3).

C. Borne supérieure, borne inférieure

Définition 3. (Borne supérieure - Borne inférieure) Soit A une partie non vide de \mathbb{R} .

On appelle **borne supérieure** de A , et on note $\sup_{\mathbb{R}}(A)$, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A , s'il existe.

On appelle **borne inférieure** de A , et on note $\inf_{\mathbb{R}}(A)$, le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A , s'il existe.

Exemple. • 0 est la borne inférieure de $[0, 1]$ ou de $]0, 1[$.

- 1 est la borne supérieure de $[0, 1]$ ou de $]0, 1[$.

Théorème 1. Toute partie non vide majorée de \mathbb{R} admet une borne supérieure.

Toute partie non vide minorée de \mathbb{R} admet une borne inférieure.

Proposition 1. Soit A une partie non vide de \mathbb{R} admettant une borne inférieure et une borne supérieure. Alors $\inf_{\mathbb{R}}(A) \leq \sup_{\mathbb{R}}(A)$.

Remarque. 1. Si A admet un plus grand élément, alors $\sup_{\mathbb{R}}(A) = \max(A)$. De même, si A admet un plus petit élément, alors $\inf_{\mathbb{R}}(A) = \min(A)$.

2. Une partie non majorée de \mathbb{R} n'admet pas de borne supérieure. De même, une partie non minorée de \mathbb{R} n'admet pas de borne inférieure.

3. On a unicité de la borne supérieure et de la borne inférieure, si elles existent.

Exercice 2. Déterminer, s'ils existent, les bornes supérieure et inférieure, ainsi que le plus petit et le plus grand élément de $E = \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in]0, 1] \right\}$.

4 Approximation d'un réel

4.1 Valeur absolue d'un réel

Définition 4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ le réel $\max\{x, -x\}$:

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Proposition 2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

- | | |
|------------------------------------|--|
| 1. $ x \geq 0$ | 4. $ x - y \leq x + y \leq x + y $ |
| 2. $ x = -x $ | 5. $ x \times y = x \times y $ |
| 3. $ x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ | 6. $\left \frac{x}{y}\right = \frac{ x }{ y } \quad (y \neq 0)$ |

La propriété 4 est appelée « inégalités triangulaires ».

Remarque. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Pour montrer que $\max\{x, y\} \leq z$, il suffit de montrer que $x \leq z$ et $y \leq z$.

Pour montrer que $\min\{x, y\} \geq z$, il suffit de montrer que $x \geq z$ et $y \geq z$.

Démonstration. (Inégalités triangulaires)

On commence par montrer que pour tous réels x et y ,

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad (\star)$$

en procédant par disjonction des cas. On peut supposer, sans perte de généralité, que $x \leq y$.

• Si $0 \leq x \leq y$, alors $|x + y| = x + y = |x| + |y|$ et la relation (\star) est vérifiée.

• Si $x \leq y \leq 0$, alors $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$ et la relation (\star) est vérifiée.

• Si $x \leq 0 \leq y$ et $-x \geq y$, alors $|x + y| = -(x + y) = (-x) - y =$

$|x| - |y| \leq |x| + |y|$. La relation (\star) est vraie dans ce cas.

• Si $x \leq 0 \leq y$ et $-x \leq y$, alors $|x + y| = x + y = -|x| + |y| \leq |x| + |y|$.

La relation (\star) est vraie.

On a montré que la relation (\star) est vraie quels que soient les réels x et y .

On montre à présent que pour tous réels x et y ,

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \quad (\star\star).$$

On suppose sans perte de généralité que $|x| \geq |y|$.

$$\begin{aligned} ||x| - |y|| &= |x| - |y| \\ &= |(x + y) + (-y)| - |y| \\ &\leq |x + y| + |-y| - |y| \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} |x + y| + |y| - |y| \\ &\leq |x + y| + |y| - |y| \text{ car } |-y| = |y| \\ &\leq |x + y| \end{aligned}$$

□

Exercice 3. Montrer, en utilisant une disjonction de cas, que pour tous réels x et y , on a

$$\max \{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) \quad \text{et} \quad \min \{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y - |x - y|).$$

4.2 Distance dans \mathbb{R}

On utilise la valeur absolue pour mesurer la distance entre deux points sur la droite réelle.

Définition 5. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

On appelle **distance** de x à y , et on note $d(x, y)$, le réel $|x - y|$.

Proposition 3. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La dernière propriété est une conséquence de l'**inégalité triangulaire** :
Pour tous réels x, y et z ,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z),$$

$$\text{i.e. } |x - z| \leq |x - y| + |y - z|.$$

4.3 Partie entière d'un réel

Définition 6. La **partie entière** d'un réel x , notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif n tel que

$$n \leq x < n + 1.$$

Exemple. $\lfloor 2.1 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$.

Proposition 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.
2. $\lfloor x \rfloor = x \iff x \in \mathbb{Z}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

4.4 Approximation décimale à 10^{-n} près

Soit x un réel et n un entier naturel. On a

$$\lfloor x10^n \rfloor \leq x10^n < \lfloor x10^n \rfloor + 1.$$

Donc

$$\underbrace{\lfloor x10^n \rfloor 10^{-n}}_{\substack{\text{approximation décimale de } x \\ \text{à } 10^{-n} \text{ près par défaut}}} \leq x < \underbrace{\lfloor x10^n \rfloor 10^{-n} + 10^{-n}}_{\substack{\text{approximation décimale de } x \\ \text{à } 10^{-n} \text{ près par excès}}}$$

On peut approcher un réel quelconque x d'aussi près que l'on veut par des nombres décimaux. L'écriture décimale illimitée de x récapitule toutes ces approximations :

$\pi = 3,14159265\dots$ signifie :

$$\begin{aligned} 3 &\leq \pi < 4 \\ 3,1 &\leq \pi < 3,2 \\ 3,14 &\leq \pi < 3,15 \\ 3,141 &\leq \pi < 3,142 \\ 3,1415 &\leq \pi < 3,1416 \\ &\dots \end{aligned}$$

5 Intervalles de \mathbb{R}

Définition 7. (Segment) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est appelé **segment** $[a, b]$:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Définition 8. (Intervalle) Une partie I de \mathbb{R} est un **intervalle** si et seulement si, pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, $[a, b] \subset I$.

Classification des intervalles de \mathbb{R}

Il existe neuf types d'intervalles de \mathbb{R} :

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

| | |
|---|--|
| $[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$ | intervalle fermé borné ou segment, |
| $]a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$ | intervalle borné semi-ouvert à gauche, |
| $[a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$ | intervalle borné semi-ouvert à droite, |
| $]a, b[= \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$ | intervalle borné ouvert, |
| $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a \leq x\}$ | intervalle fermé non majoré, |
| $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, a < x\}$ | intervalle ouvert non majoré, |
| $] - \infty, b] = \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}$ | intervalle fermé non minoré, |
| $] - \infty, b[= \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$ | intervalle ouvert non minoré, |
| $] - \infty, +\infty[= \mathbb{R}$ | intervalle ni minoré, ni majoré. |