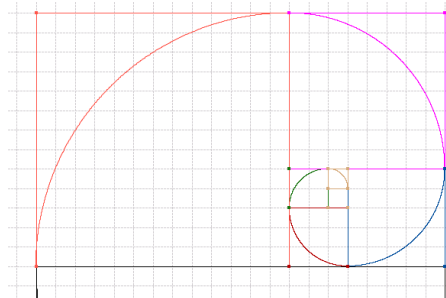


Chapitre 14 : Suites réelles

Un chapitre, un mathématicien



Leonardo Fibonacci ou *Léonard de Pise* (vers 1170 – vers 1250) est un mathématicien italien du Moyen Âge. Au cours de ses voyages autour de la Méditerranée, il découvre les méthodes de calcul arabes, qu’il contribue ensuite à diffuser en Europe dans son ouvrage *Liber Abaci* (1202). On y trouve notamment une célèbre suite numérique, aujourd’hui appelée *suite de Fibonacci*, où chaque terme est obtenu en additionnant les deux précédents. Cette suite possède des propriétés mathématiques remarquables. En particulier, le rapport de deux termes consécutifs tend vers un nombre irrationnel appelé le *nombre d’or*. Elle intervient enfin dans de nombreux domaines : mathématiques, biologie, architecture et informatique.

tenu en additionnant les deux précédents. Cette suite possède des propriétés mathématiques remarquables. En particulier, le rapport de deux termes consécutifs tend vers un nombre irrationnel appelé le *nombre d’or*. Elle intervient enfin dans de nombreux domaines : mathématiques, biologie, architecture et informatique.

1 Généralités sur les suites réelles

Définition 1. On appelle *suite réelle* une application de \mathbb{N} dans \mathbb{R} . L’ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ une suite réelle. On note u_n l’image par u de l’entier n , à la place de $u(n)$. La suite u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors notée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Par extension, on appelle également suite réelle une application de $[[n_0, +\infty[$.

1.1 Modes de définition d’une suite

Une suite réelle peut être définie de différentes façons :

Par une formule explicite On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n + 1$.

Par récurrence On considère la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

1.2 Opérations

L’ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est muni deux lois internes (addition et produit) et d’une loi externe (multiplication par un réel) :

Pour toutes suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \times (v_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}} \\ \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} &= (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}} \end{aligned}$$

Exemple. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right).$$

Déterminer le terme général de la suite $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Commenter le résultat.

1.3 Monotonie, stricte monotonie

Définition 2. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

1. *croissante* si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \geq u_n.$$

2. *décroissante* si et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

3. *monotone* si et seulement si elle est croissante ou décroissante.

4. *strictement croissante* si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n.$$

5. *strictement décroissante* si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} < u_n.$$

6. *strictement monotone* si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

MÉTHODOLOGIE : SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement positive, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Proposition 1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

Alors :

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \left(\text{resp. } \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \right).$$

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \quad \left(\text{resp. } \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \right).$$

MÉTHODOLOGIE : SENS DE VARIATION D'UNE SUITE

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1.4 Suites minorées, majorées, bornées

Définition 3. On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :

1. *majorée* si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M.$$

2. *minorée* si et seulement s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq m.$$

3. *bornée* si et seulement s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M,$$

ce qui est équivalent à dire qu'elle est à la fois majorée et minorée.

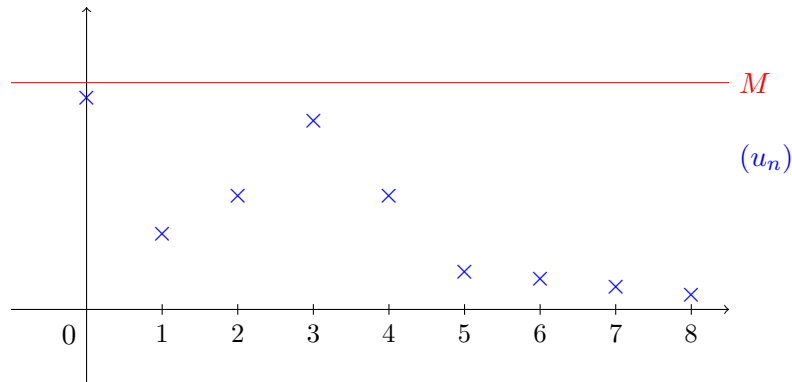


Illustration : « (u_n) est majorée »

Exemple. La suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \frac{1}{n+1} \leq 1.$$

Proposition 2. Si une suite réelle est majorée (resp. minorée, bornée) à partir d'un certain rang, alors elle est majorée (resp. minorée, bornée).

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2n \sin(n)}{1+n^2}$.
Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

1.5 Suites arithmétiques et géométriques

Soient r et q deux réels.

	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite arithmétique de raison r
Définition	
Expression de u_n en fonction de n	
Somme des $n + 1$ premiers termes :	
	$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

	$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite géométrique de raison q
Définition	
Expression de u_n en fonction de n	
Somme des $n + 1$ premiers termes :	
	$S_n = \sum_{k=0}^n u_k$

2 Limite d'une suite réelle

2.1 Limite finie ou infinie d'une suite

Définition 4. (Limite finie) Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $l \in \mathbb{R}$.
On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.

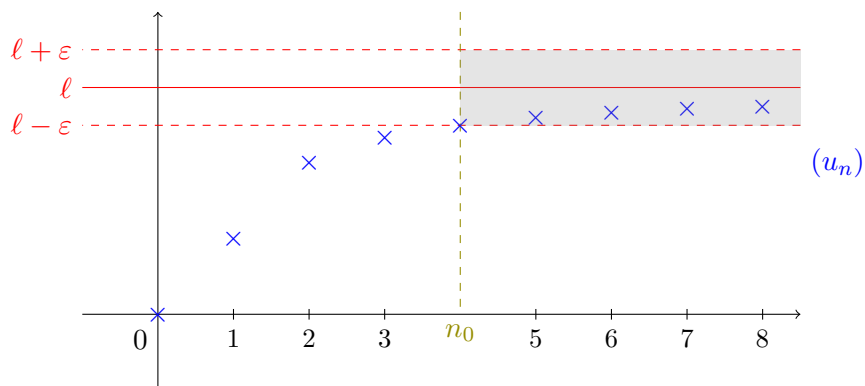


Illustration : $\ll \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \gg$

Exercice 4. Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Définition 5. (Limite infinie) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ si et seulement si quel que soit le réel M , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à M :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, \quad u_n \geq M.$$

Notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$ si et seulement si quel que soit le réel M , il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à M :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, \quad u_n \leq M.$$

Notation : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

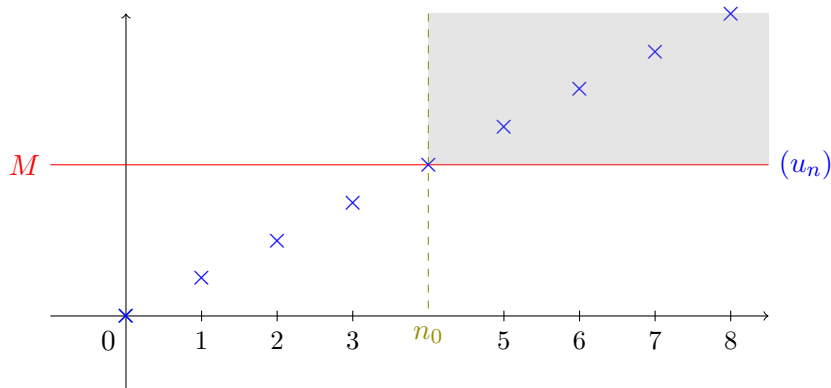


Illustration : $\ll \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \gg$

Définition 6. (Suite convergente / divergente)

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *convergente* si elle admet une limite finie $\ell \in \mathbb{R}$.

Une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite *divergente* si elle n'est pas convergente. Il y a trois types de suites divergentes : les suites qui n'admettent pas de limite, celles qui divergent vers $+\infty$ et celles qui divergent vers $-\infty$.

Exercice 5. Montrer que la suite $(\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

2.2 Théorèmes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Théorème 1. (Unicité de la limite)

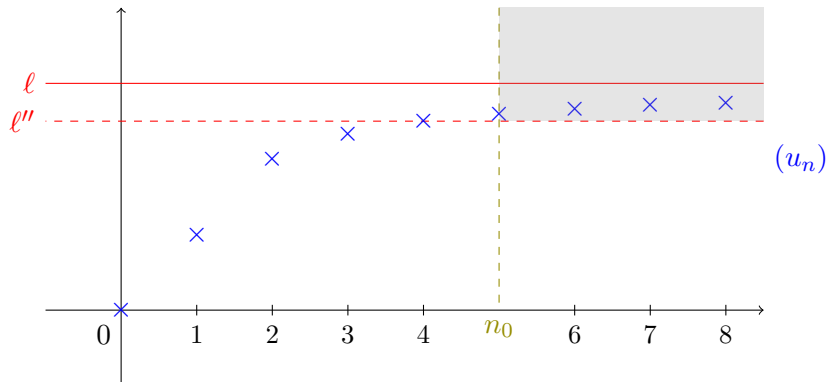
Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite (finie ou infinie), alors cette limite est unique.

Théorème 2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers un réel ℓ . Soit $\ell' > \ell$. Tous les termes de la suite sont strictement inférieurs à ℓ' à partir d'un certain rang :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, \quad u_n < \ell'.$$

Soit $\ell'' < \ell$. Tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à ℓ'' à partir d'un certain rang :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } n \geq n_0, \quad u_n > \ell''.$$

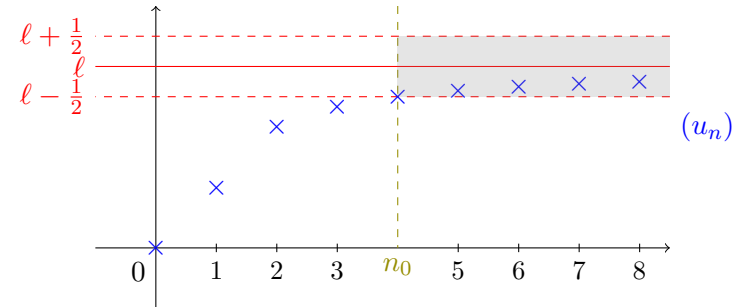


Théorème 3. Toute suite réelle convergente est bornée.

Remarque. 1. La suite $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente, car elle n'est pas bornée.

2. La réciproque du théorème précédent est fautive : la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, mais n'est pas convergente.

Démonstration.



Théorème 4. (Passage à la limite dans une inégalité)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes, telles que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Remarque. /!\ Cas des inégalités strictes :

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{2+n^2}$ et $v_n = \frac{1}{1+n^2}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$, mais $\lim u_n \leq \lim v_n$.

2.3 Opérations sur les limites

A. Une démonstration

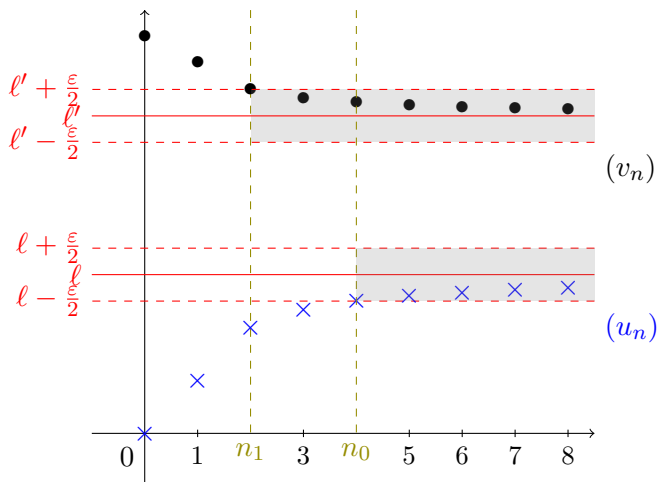
Théorème 5. (Limite d'une somme)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$.

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers $l' \in \mathbb{R}$.

Alors la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$.



Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites admettant des limites (finies ou infinies).

B. Limite de $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Le tableau suivant indique la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ \ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \in \mathbb{R}$			
$+\infty$			
$-\infty$			

C. Limite de $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Le tableau suivant indique la limite de la suite $(u_n \times v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ \ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$					
$l' < 0$					
0					
$+\infty$					
$-\infty$					

D. Limite de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

On suppose que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Le tableau suivant indique la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, lorsqu'elle existe :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ \ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$l > 0$	$l < 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l' > 0$					
$l' < 0$					
0^- ($v_n < 0$ à partir d'un certain rang)					
0^+ ($v_n > 0$ à partir d'un certain rang)					
$+\infty$					
$-\infty$					

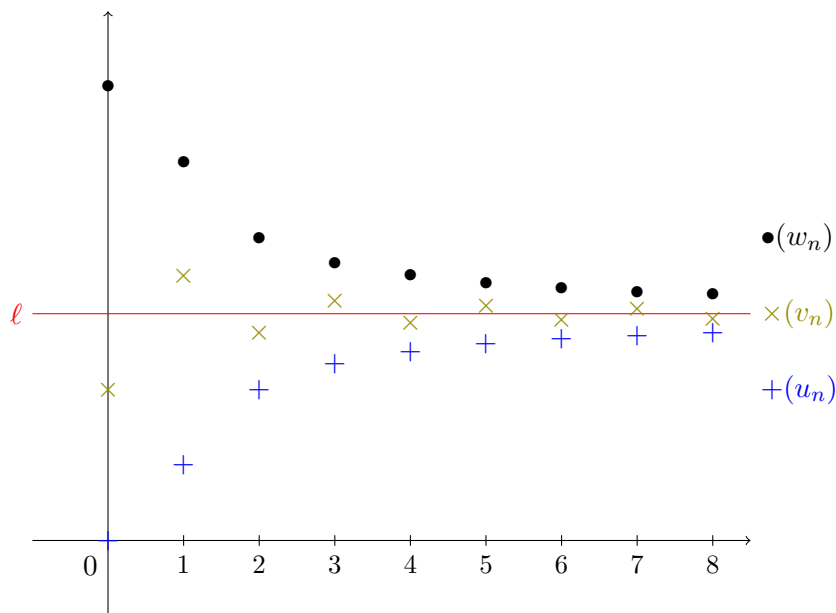
3 Théorème d'existence d'une limite

Théorème 6. (Théorème d'encadrement)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$, alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.



Exercice 6. Déterminer la limite de $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 7. (Théorème de comparaison)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exercice 7. Déterminer la limite de $(n + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

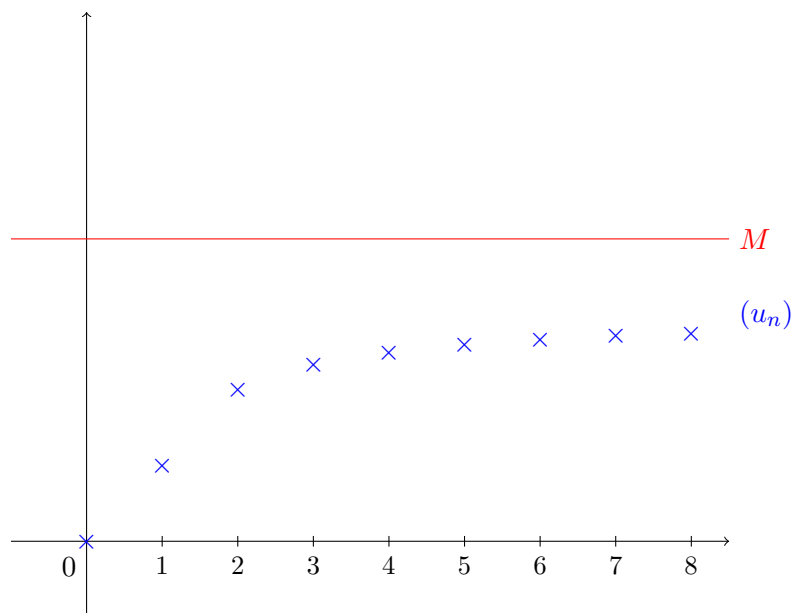
Théorème 8. (Théorème de la limite monotone)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle croissante (à partir d'un certain rang).

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, alors elle est convergente.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante (à partir d'un certain rang).

1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée, alors elle est convergente.
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.



Exercice 8. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

1. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 6.
2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Que peut-on en déduire ?
3. Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

3.1 Limites de $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème 9. (Limites de $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$)

Soit $q \in \mathbb{R}$. Dans ce cas,

Si $|q| < 1$, alors $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

Si $q > 1$, alors $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Si $q \leq -1$, alors $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Si $q = 1$, alors $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 : $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = 1$.
En particulier, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

Exemple. La suite $((-\frac{2}{3})^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Les suites $(-1)^n_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\frac{5}{4})^n_{n \in \mathbb{N}}$ divergent : la première n'admet pas de limite et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{5}{4})^n = +\infty$.

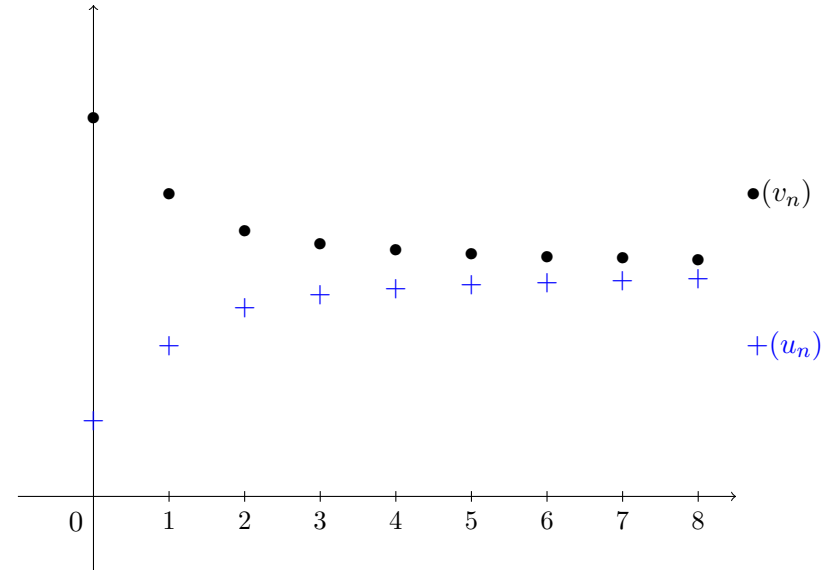
4 Suites adjacentes

Définition 7. (Suites adjacentes)

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes si et seulement si :

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante,
2. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
3. la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.

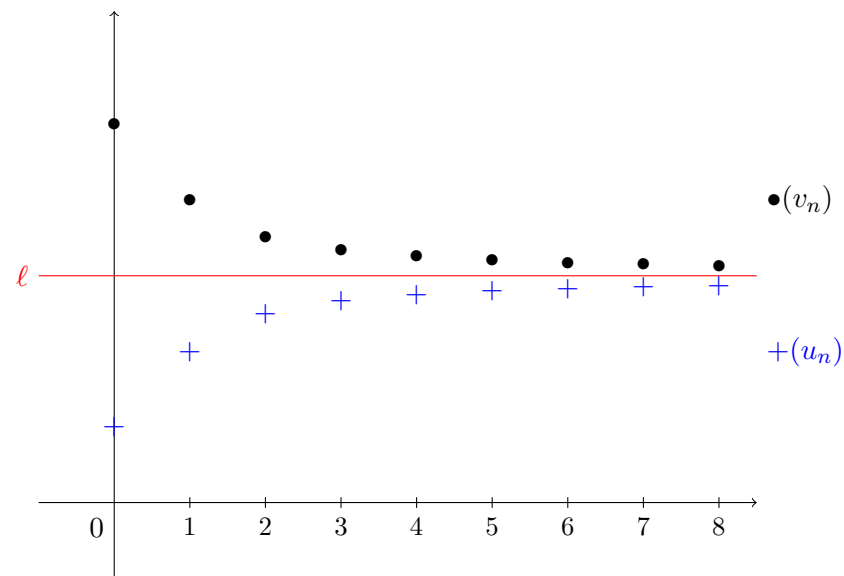


Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n-1}{n}$ et $v_n = \frac{n+1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Théorème 10. Deux suites adjacentes $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune ℓ vérifiant

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$



Remarque. Soit $n \in \mathbb{N}$, u_n est une valeur approchée (par défaut) de ℓ avec une erreur inférieure à $v_n - u_n$. De même, v_n est une valeur approchée (par excès) de ℓ avec une erreur inférieure à $v_n - u_n$.

Démonstration.

5 Suites extraites

Définition 8. Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée *suite extraite*, ou *sous-suite*, d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple. 1. La suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 11. *Si une suite possède une limite (finie ou infinie), alors ses suites extraites possèdent la même limite.*

Remarque. On utilise surtout ce théorème pour montrer qu'une suite n'admet pas de limite en exhibant deux sous-suites convergeant vers des limites différentes.

MÉTHODOLOGIE : MONTRER QU'UNE SUITE N'ADMET PAS DE LIMITE.

Exercice 10. Montrer que la suite $u_n = (-1)^n$ est divergente.

6 Comparaisons de suites

6.1 Suite dominée par une autre

Définition 9. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *dominée* par $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si :
la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Notation : $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ (lire « grand O de v_n »).

Exemple. $n \sin n = O(n)$ car :

6.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 10. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *négligeable* devant $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si :
la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Notation : $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ (lire « petit o de v_n »).

Exemple. $n = o(n^2)$ car :

Croissances comparées des suites $((\ln n)^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{\gamma n})_{n \in \mathbb{N}}$

Théorème 12. Soient α , β et γ trois réels strictement positifs. Les suites $((\ln n)^\beta)_{n \in \mathbb{N}}$, $(n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{\gamma n})_{n \in \mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$ et on a :

$$(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll e^{\gamma n},$$

c'est-à-dire $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$ et $n^\alpha = o(e^{\gamma n})$.

Exemple. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n + n^5}{e^n} = 0$.

6.3 Suites équivalentes

Définition 11. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *équivalente* à $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si et seulement si :
la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

Notation : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \sim v_n$ (lire « est équivalent à v_n »).

Exemple. $n + 1 \sim n$ car :

- Proposition 3.**
1. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_n = O(v_n)$.
 2. Si $u_n \sim v_n$, alors $u_n = O(v_n)$.
 3. (Symétrie de \sim)

Si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.

4. (Transitivité de \sim)

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Équivalents à connaître :

Proposition 4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+\ast}$.

$\sin(u_n) \sim u_n$	$\cos(u_n) \sim 1$
$\tan(u_n) \sim u_n$	$1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2}$
$\ln(1 + u_n) \sim u_n$	$e^{u_n} - 1 \sim u_n$
$(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$	

Exemple. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \sim \dots\dots\dots$ car $\dots\dots\dots$

Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances

Proposition 5. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles « convenables » telles que :

$$u_n \sim v_n \quad \text{et} \quad u'_n \sim v'_n.$$

Alors :

- *Compatibilité avec le produit :*

$$u_n \times u'_n \sim v_n \times v'_n.$$

- *Compatibilité avec le quotient :*

$$\frac{u_n}{u'_n} \sim \frac{v_n}{v'_n}.$$

- *Compatibilité avec les puissances :*

Si les suites sont strictement positives à partir d'un certain rang, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$u_n^\alpha \sim v_n^\alpha.$$

Remarque. On ne peut pas additionner et composer des équivalents en général :

- $-n^2 + 1 \sim -n^2$ et $n^2 \sim n^2 + \frac{1}{n}$, mais $1 \not\sim \frac{1}{n}$.
- $n + 1 \sim n$, mais $e^{n+1} \not\sim e^n$.

Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.

Proposition 6. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des suites réelles « convenable » telles que

$$u_n \sim v_n.$$

Si l'une des suites est positive (resp. négative) à partir d'un certain rang, alors il en est de même pour l'autre suite.

Si l'une des suites admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors l'autre suite admet la même limite.

Exercice 11. MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER UN ÉQUIVALENT

1. Déterminer des équivalents simples de

$$u_n = \frac{n-1}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{2-n^2}{n^3}.$$

2. Déterminer des équivalents de $u_n \times v_n$, $\frac{u_n}{v_n}$, $u_n + v_n$ et $u_n - v_n$.