

## Chapitre 15 : Calcul matriciel

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 1 Vocabulaire

**Définition 1.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

On appelle

*matrice de taille  $n \times p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$*

toute famille d'éléments de  $\mathbb{K}$  indicée par  $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$ .

L'ensemble de telles matrices est noté  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  (ou  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  lorsque  $n = p$ ).

Soit  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On écrit  $M$  sous la forme d'un tableau de  $n$  lignes et  $p$  colonnes, c'est-à-dire

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{array}{l} n \text{ lignes} \\ \\ \\ p \text{ colonnes} \end{array}$$

La matrice  $M$  est aussi notée  $(a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on appelle  *$i$ -ème vecteur ligne de  $M$*  la matrice de taille  $1 \times p$  égale à :

$$(a_{i,1} \ a_{i,2} \ a_{i,3} \ \cdots \ a_{i,p}).$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on appelle  *$j$ -ème vecteur colonne de  $M$*  la matrice de taille  $n \times 1$  égale à :

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}.$$

**Exemple.** La matrice  $((-1)^i \cdot j!)_{(i,j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket \times \llbracket 1, 4 \rrbracket}$  s'écrit :

### Égalité de deux matrices

Soient  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n',p'}(\mathbb{K})$ . On a :

$$A = B \iff \begin{cases} n = n' \\ p = p' \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \quad a_{i,j} = b_{i,j}. \end{cases}$$

**Définition 2.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

Soit  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$  une matrice de taille  $n \times p$  à coefficients de  $\mathbb{K}$ . On dit que  $A$  est une *matrice carrée* si et seulement si  $n = p$ . On parle de *matrice carrée de taille  $n$*  (ou d'ordre  $n$ ).

De plus, une matrice carrée est dite :

1. *symétrique* si et seulement si

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = a_{j,i}$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

2. *antisymétrique* si et seulement si

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $a_{i,j} = -a_{j,i}$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3. *triangulaire supérieure* si et seulement si

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , tel que  $i > j$ ,  $a_{i,j} = 0$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. *triangulaire inférieure* si et seulement si

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , tel que  $i < j$ ,  $a_{i,j} = 0$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

5. *diagonale* si et seulement si

pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , tel que  $i \neq j$ ,  $a_{i,j} = 0$ .

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Définition 3.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

1. La matrice de taille  $n \times p$  dont tous les coefficients sont nuls est appelée *matrice nulle* et notée  $0_{n,p}$ .

**Exemple.**

$$0_{1,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La matrice diagonale de taille  $n$  dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1 est appelée *matrice identité de taille  $n$*  et notée  $I_n$ .

**Exemple.**

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. La matrice de taille  $n \times p$  dont tous les coefficients sont nuls excepté celui en position  $(i, j)$ , qui vaut 1, est appelée *matrice élémentaire* et notée  $E_{i,j}$ .

**Exemple.**  $n = 2, p = 3$ .

$$\begin{aligned} E_{1,1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{2,1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{1,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{2,2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ E_{1,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & E_{2,3} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## 2 Opérations sur les matrices

### 2.1 Somme de deux matrices et produit par un scalaire

Soit  $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$ . L'ensemble des matrices de taille  $n \times p$  est muni d'une loi interne (addition) et d'une loi externe (multiplication par un scalaire).

Pour tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{K}$  et toutes matrices  $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$  et  $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ ,

$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$ $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket}$
---

Par exemple, si  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , alors

$$3A =$$

$$A + B =$$

$$3A - B =$$

## 2.2 Produit de deux matrices

On définit à présent, lorsque cela est possible, le produit de deux matrices.

**Définition 4.** (Produit matriciel) Soient  $m$ ,  $n$  et  $p$  trois entiers naturels non nuls. Soient  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ .

On appelle produit des matrices  $A$  et  $B$ , et note  $AB$ , la matrice  $C$  de  $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$  définie par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

*Remarque.* On ne peut effectuer le produit de deux matrices que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde.

MÉTHODOLOGIE : CALCULER LE PRODUIT DE DEUX MATRICES

**Exercice 1.** Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ .

Calculer  $AB$  et  $BA$ . Commenter les résultats.

**Règles de calculs**

On peut vérifier que pour tout  $(m, n, p, q) \in \mathbb{N}^{*4}$ ,

1. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{et cette matrice est notée } A + B + C,$$

$$A + B = B + A, \quad A + 0_{n,p} = A, \quad A - A = 0_{n,p},$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A,$$

$$(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \quad \text{et cette matrice est notée } \lambda\mu A,$$

2. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ ,

$$\boxed{A(B + C) = AB + AC.} \quad \text{(distributivité à gauche par rapport à +)}$$

3. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ ,

$$\boxed{(A + B)C = AC + BC.} \quad \text{(distributivité à droite par rapport à +)}$$

4. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$  et  $C \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ ,

$$\boxed{(AB)C = A(BC).} \quad \text{(associativité du produit matriciel)}$$

On notera ce produit  $ABC$ .

5. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,

$$\boxed{AI_p = I_n A = A} \quad \text{et} \quad \boxed{A0_p = 0_n A = 0_{n,p}.$$

### 2.3 Puissance d'une matrice carrée

**Définition 5.** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

$$A^0 = I_p, \quad A^1 = A \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, A^{n+1} = AA^n = A^n A.$$

La matrice  $A^n$  est appelée puissance  $n$ -ième de la matrice  $A$ .

**Exemple.**  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^2$  et  $A^3$ .

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER LA PUISSANCE  $n$ -IÈME D'UNE MATRICE CARRÉE - CONJECTURE & RÉCURRENCE

**Exercice 2.** Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer  $A^n$ .

**Proposition 1.** Soit  $A$  une matrice diagonale de taille  $p$  :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_p^n \end{pmatrix}.$$

**Exemple.** Déterminer la puissance 5-ième de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

## 2.4 Binôme de Newton

**Proposition 2.** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $p$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Si  $AB = BA$ , alors

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER LA PUISSANCE  $n$ -IÈME D'UNE MATRICE CARRÉE - BINÔME DE NEWTON.

**Exercice 3.** On considère les matrices

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } M = D + N.$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déterminer  $M^n$ .

## 2.5 Transposée d'une matrice

**Définition 6.** Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On appelle *transposée de  $A$*  et on note  $A^T$  la matrice de taille  $p \times n$  de coefficients  $(b_{i,j})$  telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket \quad \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

On peut vérifier que pour tout  $(m, n, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$ ,

1. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ ,

$$(A^T)^T = A \quad \text{et} \quad (\alpha A + \beta B)^T = \alpha A^T + \beta B^T.$$

2. pour tout  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ ,

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

On constate qu'une matrice carrée  $A$  est :

- (i) symétrique si et seulement si  $A^T = A$ .
- (ii) antisymétrique si et seulement si  $A^T = -A$ .

### 3 Matrice inversible

**Définition 7.** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . On dit que la matrice  $A$  est *inversible* s'il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$AB = BA = I_n.$$

On appelle *groupe linéaire*, et on note  $GL_n(\mathbb{K})$ , l'ensemble des matrices carrées inversibles de taille  $n$ .

*Remarque.* Une matrice inversible est nécessairement carrée.

**Proposition 3.** (*Unicité de l'inverse d'une matrice*) Soit  $A$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Il existe une unique matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , notée  $A^{-1}$ , telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

La matrice  $A^{-1}$  s'appelle l'inverse de  $A$ .

*Démonstration.*

**Exemple.** 1. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  (à vérifier). En déduire l'inverse de la matrice  $3A$ .

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible. La matrice  $A^{-1}$  est inversible et  $(A^{-1})^{-1} = A$ .

**Proposition 4.** Soient  $A$  et  $B$  des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont inversibles, alors  $AB$  est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*Démonstration.*

**Théorème 1.** Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) la matrice  $A$  est inversible,
- (ii) il existe une matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $AB = I_n$ ,
- (iii) il existe une matrice  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que  $CA = I_n$ .

*Conséquence.* Pour vérifier que la matrice  $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  est l'inverse de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , il suffit d'effectuer un produit matriciel.

## Opérations sur les lignes

On s'autorise trois types d'opérations sur les lignes d'une matrice :

1. multiplier une ligne par un scalaire non nul ( $L_i \leftarrow \lambda L_i$  avec  $\lambda \neq 0$ ),
2. permuter deux lignes ( $L_i \leftrightarrow L_j$ ),
3. ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne ( $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ).

**Définition 8.** On appelle *rang d'une matrice* le nombre de pivots non nuls obtenus à l'issue de l'algorithme de Gauss.

**Exercice 4.** Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & 16 & -2 \\ -11 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Proposition 5.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors :

1.  $A$  est inversible si et seulement s'il est possible de transformer  $A$  en  $I_n$  par une suite d'opérations sur les lignes.
2. Étant donnée une suite d'opérations qui transforme  $A$  en  $I_n$ , on obtient  $A^{-1}$  en appliquant les mêmes opérations, dans le même ordre, à la matrice  $I_n$ .

MÉTHODOLOGIE : CALCUL DE L'INVERSE D'UNE MATRICE.

**Exercice 5.** Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

**Proposition 6.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $\det(A) \neq 0$ .

Ainsi, lorsque  $n = 2$  ou  $n = 3$ , on peut calculer le déterminant d'une matrice pour montrer qu'elle est inversible ou non.

### Cas particulier des matrices carrées de taille 2.

**Proposition 7.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  est inversible si et seulement si  $ad - bc \neq 0$ . Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

**Exemple.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $A$  est inversible et déterminer  $A^{-1}$ .

## 4 Applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

### 4.1 Systèmes linéaires

On considère un système linéaire de  $n$  équations à  $p$  inconnues :

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}.$$

Ce système est de la forme

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

MÉTHODOLOGIE : EXPRESSION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE  $\rightsquigarrow$  NOTATION MATRICIELLE.

**Exercice 6.**

$$(S) \begin{cases} 2x - y + z + t = 0 \\ 3x - y + 2z + t = 1 \\ 4x - y + 2t = 4 \end{cases}.$$

MÉTHODOLOGIE : NOTATION MATRICIELLE D'UN SYSTÈME LINÉAIRE  $\rightsquigarrow$  EXPRESSION.

**Exercice 7.**

$$(S) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

**Proposition 8.** Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathbb{K}^n$ . On considère le système (S) :

$$AX = B$$

d'inconnue  $X \in \mathbb{K}^n$ . Si la matrice  $A$  est inversible, alors (S) admet une unique solution :  $A^{-1}B$ . En effet

$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

**Exercice 8.** Résoudre le système  $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## 4.2 Définitions

**Définition 9.** (Combinaison linéaire) Soient  $X_1, X_2, \dots, X_p$   $p$  objets. On appelle

*combinaison linéaire de  $X_1, X_2, \dots, X_p$*

toute expression de la forme

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_p X_p, \text{ avec } \lambda_i \text{ dans } \mathbb{K}.$$

On note  $\text{Vect}(X_1, X_2, \dots, X_p)$  l'ensemble des combinaisons linéaires de  $X_1, X_2, \dots, X_p$ .

**Exemple.** 1. Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$2x + y - z$  est une combinaison linéaire de  $x, y, z$ .

Mais  $x^2 + e^y + 3z$  et  $2x + y + 1$  ne sont pas des combinaisons linéaires de  $x, y, z$ .

2. Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

La matrice  $A$  est une combinaison linéaire des matrices  $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$  car  $A = 1 \times E_{1,1} + 2 \times E_{1,2} + 0 \times E_{2,1} + (-1) \times E_{2,2}$ .

**Définition 10.** On appelle *application linéaire de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$*  toute application  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  de la forme :

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}, \text{ avec } a_{i,j} \in \mathbb{K}.$$

**Exemple.** L'application  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

L'application  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  n'est pas une application linéaire.

**Définition 11.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . L'application  $\mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  est appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice  $A$ .

$$X \mapsto AX$$

MÉTHODOLOGIE : MATRICE  $\rightsquigarrow$  APPLICATION LINÉAIRE.

**Exercice 9.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -6 & 16 & -2 \end{pmatrix}$ . Donner l'expression de l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

MÉTHODOLOGIE : APPLICATION LINÉAIRE  $\rightsquigarrow$  MATRICE.

**Exercice 10.** 1. Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$$

Quelle est la matrice canoniquement associée à  $f$  ?

2. Soit  $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

$$(x, y, z, t) \mapsto (2x - y + z + t, 3x - y + 2z + t, 4x - y + 2t)$$

Quelle est la matrice canoniquement associée à  $g$  ?

**Définition 12.** Soit  $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$  une application linéaire.

On appelle *noyau de  $f$* , et on note  $\text{Ker}(f)$ , l'ensemble des éléments  $X$  de  $\mathbb{K}^p$  tels que  $f(X) = 0_{\mathbb{K}^n}$  :

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(0_{\mathbb{K}^n}) = \{X \in \mathbb{K}^p \mid f(X) = (0, 0, \dots, 0)\}.$$

On appelle *image de  $f$* , et on note  $\text{Im}(f)$ , l'ensemble des  $f(X)$  tels que  $X \in \mathbb{K}^p$  :

$$\text{Im}(f) = \{f(X) \mid X \in \mathbb{K}^p\}.$$

**Proposition 9.** Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . On note  $f$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  et  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de la matrice  $A$ . Alors

$$\text{Ker}(f) = \left\{ X \in \mathbb{K}^p \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et  $\text{Im}(f)$  est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs colonne de  $A$  :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p).$$

*Démonstration.*

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER  $\text{Ker}(f)$ .

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z)$$

Déterminer  $\text{Ker}(f)$ .

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER  $\text{Im}(f)$ .

**Exercice 11.** Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z) .$$

Déterminer  $\text{Im}(f)$ .

MÉTHODOLOGIE : DÉTERMINER DES ÉQUATIONS DE  $\text{Im}(f)$ .

**Exercice 12.** Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y - z, 4x + y - 2z, 6x + 3y - 4z) .$$

Déterminer des équations de  $\text{Im}(f)$ .