Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Première partie : Espaces et sous-espaces vectoriels

1 Définitions et règles de calcul

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, ou un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, est un ensemble non vide E dont les éléments s'appellent des vecteurs et qui est muni de deux opérations $+$ et $\cdot$, la somme de vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire, vérifiant un certain nombre de propriétés.

Pour tous $x, y \in E$, $x + y \in E$.
Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\lambda \cdot x \in E$.

Notation : $(E, +, \cdot)$.

Les règles de calcul sont les suivantes :

1. Pour tous $x, y \in E$, on a $x + y = y + x$,
2. Pour tous $x, y, z \in E$, on a $(x + y) + z = x + (y + z)$ et ce vecteur est noté $x + y + z$,
3. Il existe un vecteur de E appelé vecteur nul et noté 0_E tel que pour tout $x \in E$, $x + 0_E = x$,
4. Pour tout $x \in E$, il existe un vecteur de E, appelé opposé de x et noté $-x$, tel que $x + (-x) = 0_E$,
5. Pour tout $x \in E$, on a $1 \cdot x = x$,
6. Pour tout $x \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$,
7. Pour tout $x \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$,
8. Pour tous $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Espaces vectoriels de référence

$(E, +, \cdot)$	0_E
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$	0
$(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$	$0_{\mathbb{K}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Le vecteur nul
$(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +, \cdot)$ L'ensemble des suites réelles	$0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} = (0, 0, \dots)$ La suite nulle
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$	$0_{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ La matrice nulle à n lignes et p colonnes
$(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$	$0_{\mathbb{K}[X]} = 0$ Le polynôme nul
$(\mathscr{F}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ avec $I \subset \mathbb{R}$ non vide, aussi noté $(\mathbb{R}^I, +, \cdot)$ L'ensemble des fonctions $I \to \mathbb{R}$	$0_{\mathscr{F}(I,\mathbb{R})} : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ La fonction nulle définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$

$(E,+,\cdot)$	0_E
$(\mathscr{F}(A,\mathbb{K}),+,\cdot)$ avec $A\subset\mathbb{K}$ non vide L'ensemble des applications de A dans $\mathbb{K}$	$0_{\mathscr{F}(A,\mathbb{K})}: \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$ L'application nulle définie sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$

Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs

Définition 2. Soient $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
S'il existe $\lambda_1\in\mathbb{K}$ tel que $\overrightarrow{w}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}$, alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est *colinéaire* au vecteur $\overrightarrow{v_1}$.
S'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}$ tels que $\overrightarrow{w}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{v_n}$, alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{w}$ est *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$.

Exemple.

1. Le vecteur $Y=\begin{pmatrix}2\\0\\-4\end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $X=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, car $Y=2X$.
2. Le vecteur $Y=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $X_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $X_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, car $Y=2X_1+X_2$.
3. Le polynôme $P=1-2X^2$ est une combinaison linéaire des polynômes $P_0=1$, $P_1=X$ et $P_2=X^2$, car
$$P=1\times P_0+0\times P_1-2\times P_2.$$

2 Sous-espaces vectoriels

Définition

Définition 3. Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si :

1. $F\subset E$,
2. $0_E\in F$,
3. pour tous $x,y\in F$, $x+y\in F$,
4. pour tout $x\in F$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, $\lambda\cdot x\in F$.

Proposition 1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*
Tout sous-espace vectoriel de E est un $\mathbb{K}$- espace vectoriel.

Les sous-espaces vectoriels fournissent de nouveaux et nombreux exemples d'espaces vectoriels.

Exemple.

1. Les parties $\{0\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues (respectivement dérivables) de I dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. L'ensemble des suites convergentes réelles est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$. C'est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. L'ensemble des matrices diagonales d'ordre n est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),+,\cdot)$. C'est donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel de E n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Exemples de sous-espaces vectoriels

Exercice 1. On note F est l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$$

d'inconnue $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y+3z=0 \text{ et } x-y-z=0\right\}.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$.

Plus généralement :

Proposition 2. *L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{K}$ à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^p,+,\cdot)$.*

Exercice 2. On note $\mathscr{H}$ l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y'+xy=0 \ (H).$$

Montrer que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,\cdot)$.

Plus généralement :

Proposition 3. *L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $(\mathscr{F}(I,\mathbb{R}),+,\cdot)$.*

Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Proposition 4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$ des vecteurs de E.*

On note $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n})$ l'ensemble des vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$:

$$\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n})=\{\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\cdots+\lambda_n\overrightarrow{v_n} \text{ avec } \lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{K}\}.$$

Alors $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n})$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $\overrightarrow{v_1},\dots,\overrightarrow{v_n}$.

Exemple.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est le plan d'équation $z=0$.
2. Dans $\mathbb{R}[X]$, $\mathrm{Vect}(1-X,X^2)$ est l'ensemble des polynômes de la forme $a(1-X)+bX^2$, avec $a,b\in\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit $F=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-2y+z=0\right\}$.
Montrer que $F=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 5. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Remarque. La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Proposition 6. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.*

On note $F+G$ l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{z} \in E$ qui s'écrivent $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, avec $\overrightarrow{x} \in F$ et $\overrightarrow{y} \in G$:

$$F + G = \{\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} \in F \text{ et } \overrightarrow{y} \in G\}.$$

Alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle la somme de F et G.

Proposition 7. *Si $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots \overrightarrow{x_n})$ et $G = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{y_1}, \dots, \overrightarrow{y_p})$, alors*

$$F + G = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{x_1}, \dots, \overrightarrow{x_n}, \overrightarrow{y_1}, \dots, \overrightarrow{y_p}).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}[X]$, si $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2)$, alors

$$\begin{aligned} F + G &= \mathrm{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \left\{a + bX + cX^2, \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Deuxième partie : Familles finies de vecteurs

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Indépendance linéaire

Familles libres

Définition 1. (Famille libre) Soient $x_1, \dots, x_n \in E$. On dit que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont *linéairement indépendants* (ou encore que les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ constitue une *famille libre*) si pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on a l'implication

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Ainsi la famille $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre s'il n'y a qu'une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de $x_1, \dots, x_n$.

Une famille constituée d'un seul vecteur $x \in E$ est dite libre si et seulement si $x \neq 0_E$.

Exercice 1. Montrer les assertions suivantes :

1. Dans $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ constituent une famille libre.
2. Dans $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$, les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$ sont linéairement indépendants.
3. Dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$, les matrices suivantes constituent une famille libre :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les fonctions cos et sin sont linéairement indépendantes .

Proposition 1. *Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degrés échelonnés (de degrés deux à deux distincts) est libre.*

Exemple.
1. La famille $(1, X, X^2)$ est libre.
2. La famille $(1 - X, 1 + X + X^2, 1 - X + X^4)$ est libre.

Remarque. Attention la réciproque est fausse : une famille libre de polynômes n'est pas nécessairement de degrés échelonnés.

Familles liées

Définition 2. (Famille liée) Une famille de vecteurs $x_1, \dots, x_n$ qui n'est pas libre est dite *liée*. Dans une famille liée, il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls (c'est-à-dire qu'au moins l'un d'entre eux n'est pas nul) tels que
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E.$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$, la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est liée car $2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ est liée car $0\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+1\times\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.
Plus généralement deux vecteurs de $\mathbb{K}^n$ constituent une famille liée si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad v_3=\begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille $\{v_1,v_2,v_3\}$ est liée et déterminer une relation linéaire liant ces vecteurs.

2 Famille génératrice

Définition 3. (Famille génératrice) Soient F un sous-espace vectoriel de E et $x_1,\dots,x_n\in F$.
On dit que la famille $\{x_1,\dots,x_n\}$ est une *famille génératrice* de F (ou encore que F est engendré par les vecteurs $x_1,\dots,x_n$) si tout vecteur y de F s'écrit comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1,\dots,x_n$:
$\forall y\in F,\ \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$,

$$y=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_nx_n.$$

Dans ce cas, $F=\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_n)$.

Remarque.

1. Dans une famille génératrice, on peut échanger deux vecteurs :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

2. Dans une famille génératrice, on peut retirer le vecteur nul :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

3. Dans une famille génératrice, on peut multiplier un vecteur par un scalaire non nul :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right).$$

4. Dans une famille génératrice, on peut ajouter à un vecteur un multiple d'un autre vecteur :

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)\underset{v_2\leftarrow v_2-v_1}{=}\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right).$$

5. Ainsi, dans une famille génératrice, on peut supprimer (ou ajouter) un vecteur qui serait combinaison linéaire des autres vecteurs.

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

Méthodologie : Déterminer une famille génératrice (Description paramétrée)

Exercice 3. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note

$$F=\left\{\begin{pmatrix}4a-b\\2a-b\\6a-b\end{pmatrix}\middle|\,(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-2b \\ 3c & a \end{pmatrix} \middle| (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \left\{ \alpha X^3 + (\alpha - \beta)X^2 + 2\alpha X - \beta \;\middle|\; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Méthodologie : Déterminer une famille génératrice

Exercice 4. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\, AM = MA \},$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] |\, P(1) = 0 \}.$$

3 Bases

Définition 4. (Base) Soient $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs de E. On dit que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une *base* de E si cette famille est à la fois libre et génératrice.

Méthodologie : Déterminer une base d'un sous-espace vectoriel

Exercice 5. Déterminer une base des sous-espaces vectoriels suivants :

1. Dans $\mathbb{R}^3$: on note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x - y - z = 0 \text{ et } x + y - 3z = 0 \right\}.$$

2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$: on note

$$G = \{ M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) |\, AM = MA \},$$

où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Dans $\mathbb{R}[X]$: on note

$$H = \{ P \in \mathbb{R}_2[X] |\, P(1) = 0 \}.$$

Définition 5. (Coordonnées) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ uniques tels que

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n.$$

Les scalaires $x_1, \ldots, x_n$ sont appelés les *coordonnées* du vecteur x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Notation : Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Exemples usuels.

Base canonique de $\mathbb{K}^n$: Soient

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$: La famille $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Par exemple, la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\mathscr{B} = \left(1, X, X^2\right)$ et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(1 - X^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: L'ensemble des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ constitue une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Par exemple, on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors $\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{F}$ la famille (v_1, v_2, v_3). Montrer que $\mathscr{F}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{F}$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes $P_1 = 1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 1 + X + X^2$.

1. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ constitue une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer les coordonnées du polynôme $R = 3 + X + 2X^2$ dans la base $\mathscr{B}$.

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Troisième partie : Espaces vectoriels de dimension finie

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1 Dimension finie

Définition 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On dit que E est un espace vectoriel *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème 1. *(Théorème de la base extraite)*
On peut extraire de toute famille génératrice finie de E une base de E.

Corollaire 1. *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Méthodologie : Extraire une base d'une famille génératrice.

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \ v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ et } v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathscr{F}$ la famille $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ et F le sous-espace vectoriel engendré par $\mathscr{F}$: $F = \operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$. Extraire de $\mathscr{F}$ une base de F.

Solution.

Pour cela, on opère **sur les colonnes** de la matrice

$$\operatorname{Mat}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -4 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

On s'autorise trois types d'opérations sur les colonnes d'une matrice :

1. multiplier une colonne par un scalaire non nul :
$$C_i \leftarrow \lambda C_i \text{ avec } \lambda \neq 0,$$
2. permuter deux colonnes :
$$C_i \leftrightarrow C_j,$$
3. ajouter à une colonne un multiple d'une autre colonne :
$$C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j.$$

Théorème 2. *(Théorème de la base incomplète)*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs linéairement indépendants

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Compléter la famille $\{v_1, v_2\}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Proposition 1. *Supposons que E possède une base formée de n vecteurs, alors toute famille de p vecteurs avec $p > n$ est liée.*

Théorème 3. *Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E contiennent le même nombre de vecteurs. Ce nombre est appelé dimension de E et se note* $\dim E$.
Par convention, on définit la dimension de l'espace vectoriel $\{0\}$ *en posant* $\dim\{0\} = 0$.

Dimensions des espaces vectoriels de dimension finie de référence

E	$\mathbb{K}$-espace vectoriel	Base canonique	Dimension
$\mathbb{K}^n$	$\mathbb{K}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (e_1 \ldots, e_n)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ $\ldots\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	n
$\mathbb{R}^3$	$\mathbb{R}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ avec $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3
$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (1, i)$	2
$\mathbb{K}_n[X]$	$\mathbb{K}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$	$n+1$
$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (E_{i,j})$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, p]\!]$	$n \times p$
$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (E_{i,j})$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$	n^2
$\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$-espace vectoriel	$\mathscr{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ avec $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	4

L'énoncé qui suit est utile lorsque l'on veut démontrer que des vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n forment une base :

Théorème 4. *Soit E un espace-vectoriel de dimension n.*
Une famille libre de n vecteurs constitue une base de E.
Une famille génératrice de n vecteurs constitue une base de E.

Remarque. On peut énoncer ce résultat de la façon suivante. Soit $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs dans un espace de dimension n. Alors les assertions suivantes sont équivantes :

1. $\mathscr{F}$ est libre,
2. $\mathscr{F}$ est génératrice,
3. $\mathscr{F}$ est une base.

Exercice 3.

1. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, on considère les polynômes suivants :
$$P_0 = 1 \quad P_1 = 1 + X \quad P_2 = X + 2X^2 \quad P_3 = 1 + X^3.$$
Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs
$$u = (1, 2, 3),\ v = (1, 1, 1) \text{ et } w = (0, 0, 1).$$
Montrer que la famille $\mathscr{F} = \{u, v, w\}$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Sous-espaces vectoriels de dimension finie

Théorème 5. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie.*
Si F est un sous-espace vectoriel de E,
alors F est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.

De plus, si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$,

$$\textit{alors } F = E.$$

Théorème 6. *(Formule de Grassmann) Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espces vectoriels de E. On a*

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Chapitre 17 : Espaces vectoriels

Quatrième partie : Somme de sous-espaces vectoriels en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.

Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 1. (Somme de sous-espaces vectoriels) On note $F+G$ l'ensemble des vecteurs $z \in E$ qui s'écrivent $z = x + y$, avec $x \in F$ et $y \in G$:

$$F + G = \{x + y \text{ tels que } \ x \in F \text{ et } y \in G\}.$$

On l'appelle la somme de F et de G.

Proposition 1. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. 1. $F + G \subset E$.

2. $0_E \in F + G$, car $0_E = 0_E + 0_E \in F + G$.

3. Si $z = x + y$ et $z' = x' + y'$ appartiennent à $F + G$, alors

$$\begin{aligned} z + z' &= (x+y) + (x'+y') \\ &= \underbrace{x + x'}_{\in F} + \underbrace{y + y'}_{\in G} \end{aligned}$$

et $z + z' \in F + G$.

4. Si $z = x + y \in F + G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$\begin{aligned} \lambda z &= \lambda(x+y) \\ &= \underbrace{\lambda x}_{\in F} + \underbrace{\lambda y}_{\in G} \end{aligned}$$

et $\lambda z \in F + G$. □

Proposition 2. *Si $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots x_n)$ et $G = \mathrm{Vect}(y_1, \dots, y_p)$, alors*

$$F + G = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p).$$

Exemple. Dans $\mathbb{R}[X]$, si $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2)$, alors

$$\begin{aligned} F + G &= \mathrm{Vect}(1, X, X^2) \\ &= \left\{a + bX + cX^2, \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} \\ &= \mathbb{R}_2[X]. \end{aligned}$$

Définition 2. (Somme directe) La somme $F + G$ est dite directe (ou que F et G sont en somme directe) si tout vecteur de $F + G$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

Pour tout $z \in F + G$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ unique tels que $z = x + y$.

Notation : $F \oplus G$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}[X]$, si $F = \mathrm{Vect}(1, X)$ et $G = \mathrm{Vect}(X^2)$, alors F et G sont en somme directe.

Proposition 3. *On a :*

$$F \oplus G \iff F \cap G = \{0\}.$$

Exercice 1. Soient $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y+z=0\}$
et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x-y-z=0 \text{ et } 2x-z=0\}$.
Montrer que F et G sont en somme directe.

Proposition 4. *Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille libre de vecteurs de E. Alors Vect$(x_1,\dots,x_k)$ et Vect$(x_{k+1},\dots,x_n)$ sont en somme directe.*

Sous-espaces vectoriels supplémentaires

Définition 3. (Sous-espaces vectoriels supplémentaires) On dit que F et G sont supplémentaires, ou que F est un supplémentaire de G, si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

Pour tout $z \in E$, il existe $x \in F$ et $y \in G$ unique tels que $z = x+y$.

Cette propriété se note $F \oplus G = E$.

Exemple. Dans $\mathbb{R}^2$: On note $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ et $G = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$.
Tout vecteur $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G :

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \underbrace{x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}_{\in G}.$$

On a donc $F \oplus G = \mathbb{R}^2$.

Exercice 2. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: on note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de taille n. Montrer que

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Proposition 5. *On a :*

$$\begin{aligned} F \oplus G = E &\iff F+G=E \text{ et } F\cap G=\{0\} \\ &\iff \dim(F+G)=\dim(E) \text{ et } F\cap G=\{0\} \end{aligned}$$

Proposition 6. *Soient $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F et $(g_1,\dots,g_q)$ une base de G.*
Alors F et G sont supplémentaires si et seulement si $(f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$ est une base de E.

Exercice 3. Soient

$$u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On note $F = \text{Vect}(u)$ et $G = \text{Vect}(v,w)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.