Chapitre 7 : Fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Un chapitre, un mathématicien

Leonhard Euler (1707–1783) était un mathématicien suisse très célèbre. Il est surtout connu pour avoir défini la notion de fonction telle qu'on l'utilise encore aujourd'hui et pour avoir introduit la notation $f(x)$. Dans son ouvrage *Introductio in analysin infinitorum* (1748), il a étudié des fonctions très variées : polynomiales, trigonométriques, exponentielles ou logarithmiques. Euler a aussi travaillé sur les séries, les équations différentielles et les fonctions complexes, posant les bases de l'analyse moderne. Grâce à lui, les fonctions sont devenues des objets mathématiques clairs et faciles à manipuler, ce qui permet de mieux comprendre et modéliser de nombreux phénomènes en mathématiques et en sciences. Son travail reste aujourd'hui fondamental pour tous ceux qui étudient les fonctions et l'analyse.

1 Généralités

1.1 Fonctions

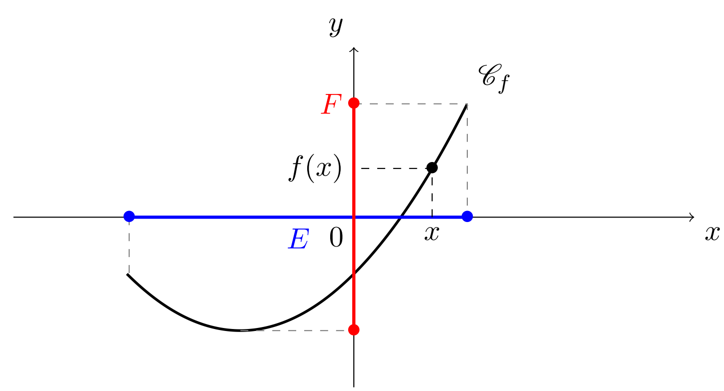
Définition. Une **fonction** ou **application**, notée f, est une relation entre deux ensembles E et F qui associe à chaque élément x du premier ensemble E (**ensemble de départ**) un unique élément du second ensemble F (**ensemble d'arrivée**), noté $f(x)$:

$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

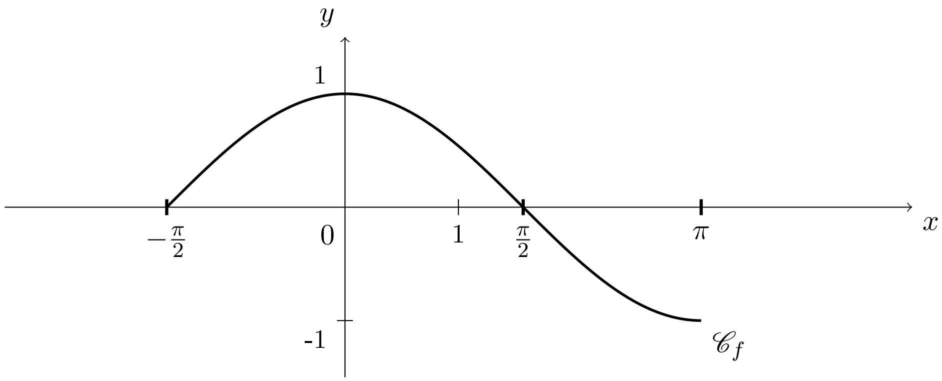
On parle aussi de **fonction définie sur E à valeurs dans F**.
Soient $x \in E$ et $y \in F$ tels que

$$f(x) = y.$$

Alors x est un **antécédent** de y par f et y est l'**image** de x par f.



Exercice 1.



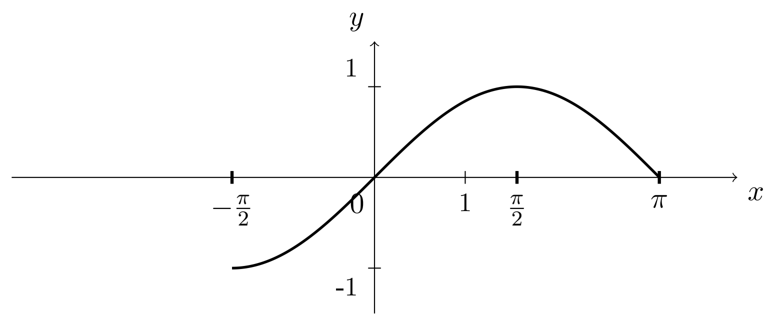
1. Définir f.
2. Déterminer les antécédents de 0 par la fonction f.
3. Déterminer l'image de 0 par f.

Définition. Soit A une partie de E. On peut alors considérer la **restriction de la fonction** f **à** A, notée $f|_A$, en posant :

$$f|_A \; : \; \begin{array}{rcl} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}.$$

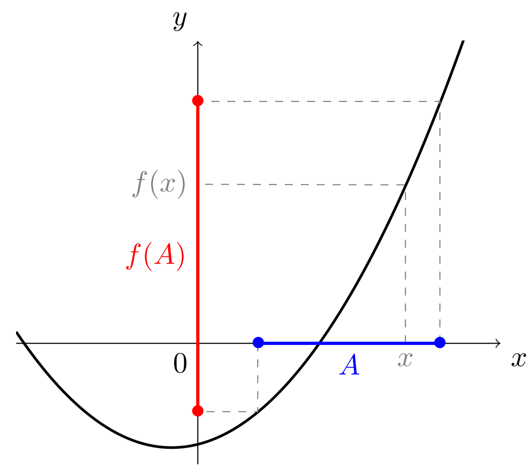
On dit aussi que f est un **prolongement de** $f|_A$**.**

Exemple. Représentation graphique de $\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\pi]}$:



Définition. (Image d'une partie de E par f) Soit $A \subset E$. On note $f(A)$ l'ensemble défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$

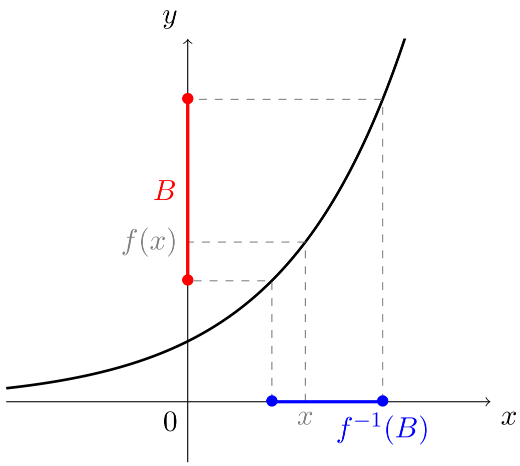


Exercice 2. Déterminer les images directes suivantes :

$$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right), \quad \ln([1, \mathrm{e}[) \quad \text{et} \quad \exp(\mathbb{R}).$$

Définition. (Image réciproque d'une partie de F par f) Soit $B \subset F$. On note $f^{-1}(B)$ l'ensemble défini par

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$



Exercice 3. Déterminer les images réciproques suivantes :

$$\sin^{-1}(\{0\}), \quad \exp^{-1}([1, 2[) \quad \text{et} \quad \ln^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$. On parle alors de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.

Définition. On note $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Opérations dans $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$

Définition. Soient $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ et $g\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_g & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) \end{array}$.
On peut définir sur $\mathscr{D} = \mathscr{D}_f \cap \mathscr{D}_g$ la **somme** et le **produit** de ces deux fonctions :

$$f+g\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad f\cdot g\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{D} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x)\cdot g(x) \end{array}.$$

En posant $\mathscr{D}_{g\circ f} = \{x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) \in \mathscr{D}_g\}$, on peut définir la **composée** $g \circ f$ de la façon suivante :

$$g\circ f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_{g\circ f} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Méthodologie : Domaine de définition de $g \circ f$.

Exemple. $g(x) = \sqrt{1-x}$ et $f(x) = \ln(x)$.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $g \circ f$, noté $\mathscr{D}_{g\circ f}$.

Exercice 4. Soient f et g deux fonctions telles que

$$f(x) = \ln(x) \text{ et } g(x) = \sqrt{x}.$$

Déterminer les domaines de définition, ainsi que les expressions des fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$.

1.2 Représentation graphique

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $f \ : \ \mathscr{D}_f \to \mathbb{R}$.

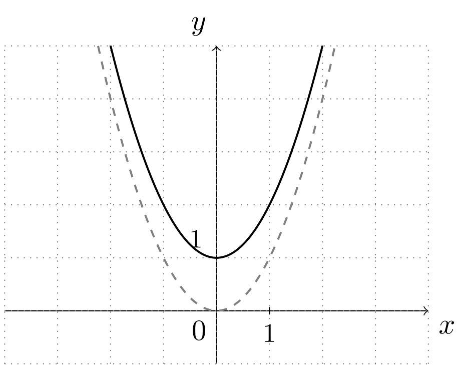
Définition. On appelle **courbe représentative** (ou **graphe**) de f, et on note $\mathscr{C}_f$, l'ensemble :

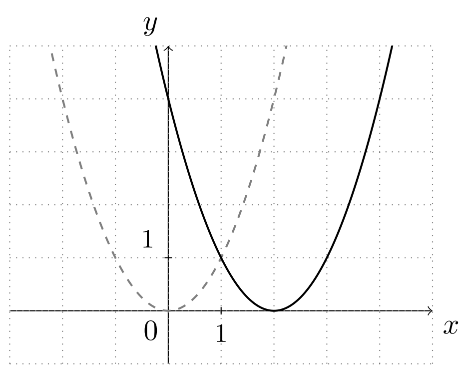
$$\begin{aligned} \mathscr{C}_f &= \{(x, y) \in \mathscr{D}_f \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \\ &= \{(x, f(x)) \mid x \in \mathscr{D}_f\}. \end{aligned}$$

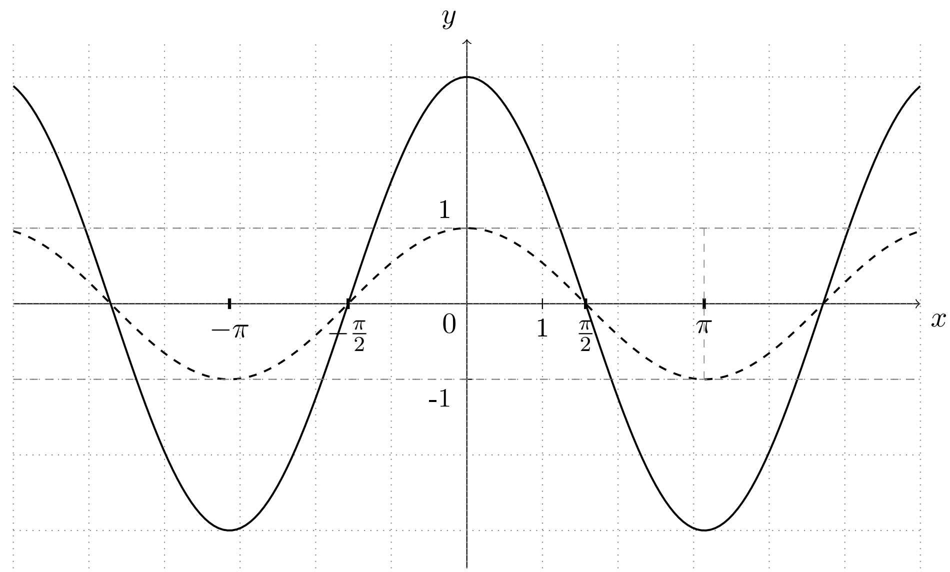
Soit $a \in \mathbb{R}^\star$.

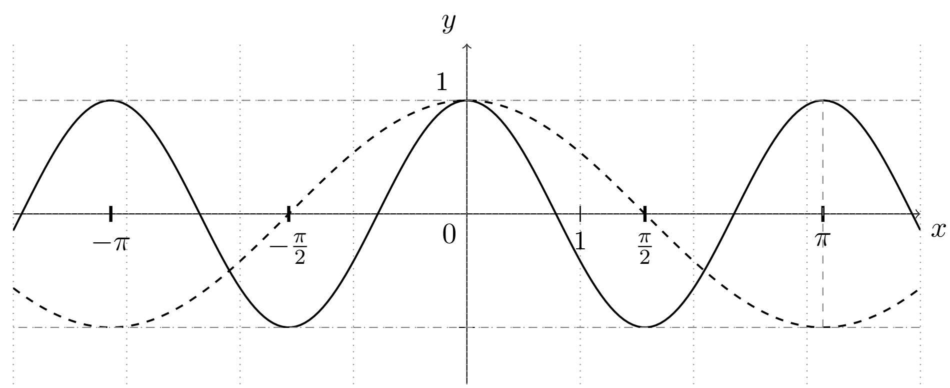
1. Le graphe de la fonction $x \to f(x) + a$ est obtenu en translatant $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $a\vec{j}$.
2. Le graphe de la fonction $x \to f(x - a)$ est obtenu en translatant $\mathscr{C}_f$ par le vecteur $a\vec{i}$.
3. Le graphe de la fonction $x \to f(ax)$ est obtenu en « dilatant » $\mathscr{C}_f$ le long du vecteur $\vec{i}$ d'un facteur $\frac{1}{a}$, c'est-à-dire en multipliant les valeurs en abscisse par $\frac{1}{a}$.
4. Le graphe de la fonction $x \to af(x)$ est obtenu en « dilatant » $\mathscr{C}_f$ le long du vecteur $\vec{j}$ d'un facteur a, c'est-à-dire en multipliant les valeurs en ordonnée par a.

Exercice 5. Proposer une expression explicite pour chacune des fonctions représentées ci-dessous :









1.3 Parité et périodicité

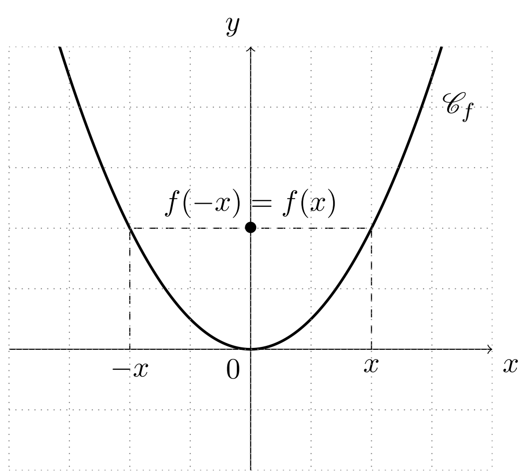
Définition. (Fonction paire - impaire) La fonction f est dite **paire** si et seulement si

$$\begin{cases} \mathscr{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x) \end{cases}.$$

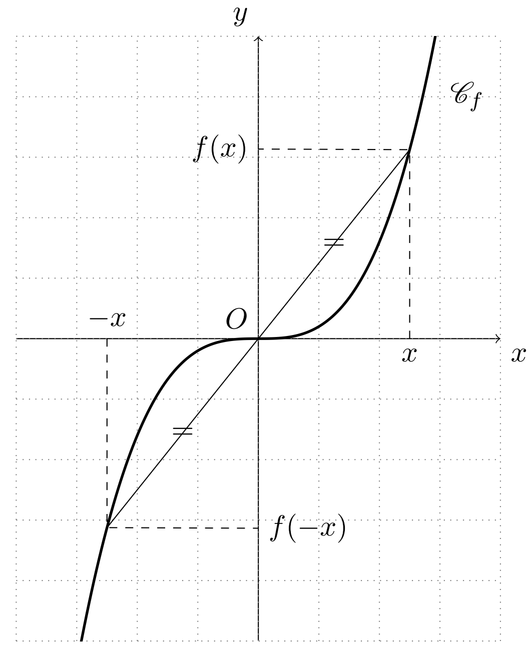
La fonction f est dite **impaire** si et seulement si

$$\begin{cases} \mathscr{D}_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}.$$

Remarque. La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (Oy). Celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine O du repère.



Graphe d'une fonction paire



Graphe d'une fonction impaire

Exercice 6. Montrer que la fonction f définie par

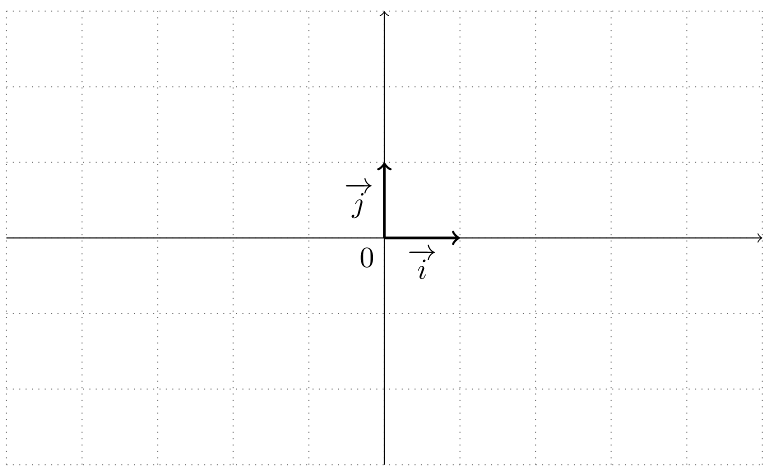
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

est une fontion impaire.

Définition. (Fonction périodique) Soit $T \in \mathbb{R}^\star$.
La fonction f est dite périodique de période T ou T-périodique si et seulement si
$$\begin{cases} \forall x \in \mathscr{D}_f, & x - T \in \mathscr{D}_f \text{ et } x + T \in \mathscr{D}_f, \\ \forall x \in \mathscr{D}_f, & f(x+T) = f(x) \end{cases}.$$

Remarque. La courbe représentative d'une fonction T-périodique est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Exercice 7. On note f la fonction paire et 2-périodique telle que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 2x$. Tracer la courbe représentative de la fonction f.

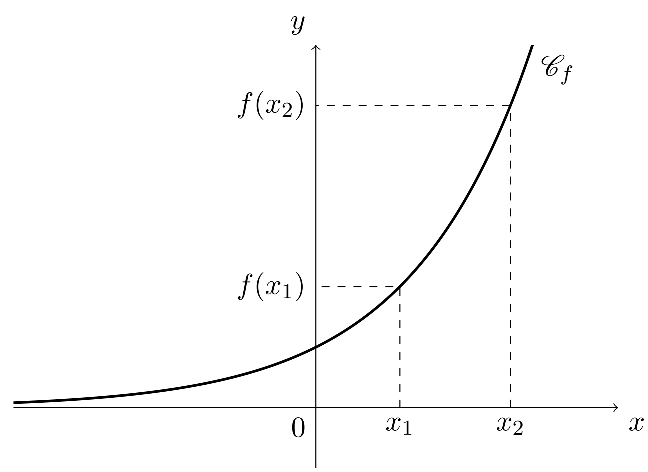


Exercice 8. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ est π-périodique.

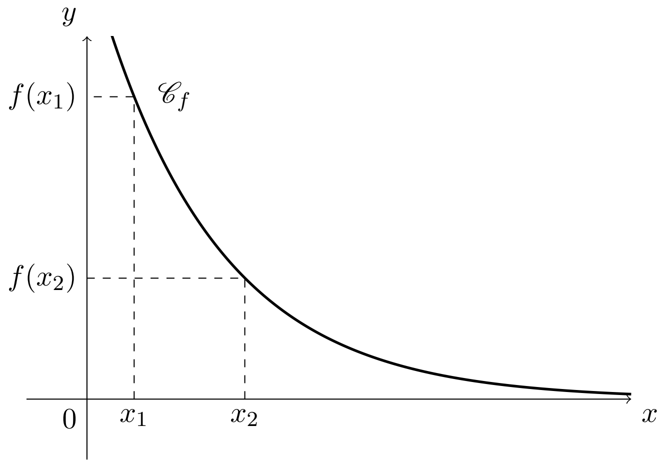
1.4 Variations, extrema

Monotonie

Définition. La fonction f est dite **croissante** (resp. **strictement croissante**) sur l'intervalle I si et seulement si
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$
$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)).$$
La fonction f est dite **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur l'intervalle I si et seulement si
$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$
$$(\text{resp. } x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)).$$
La fonction f est dite **monotone** sur I si elle est soit croissante sur I soit décroissante sur I. On définit de manière similaire une fonction **strictement monotone** sur I.



Graphe d'une fonction croissante



Graphe d'une fonction décroissante

Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition. La fonction f est dite **majorée** si et seulement si

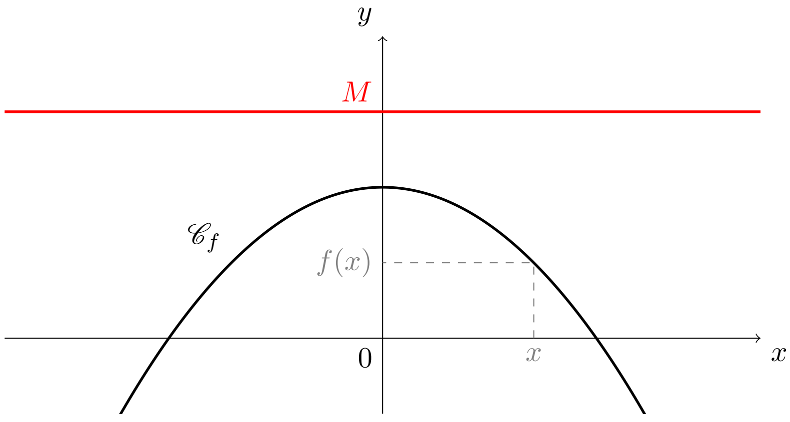
$$\text{il existe } M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant M.$$

La fonction f est dite **minorée** si et seulement si

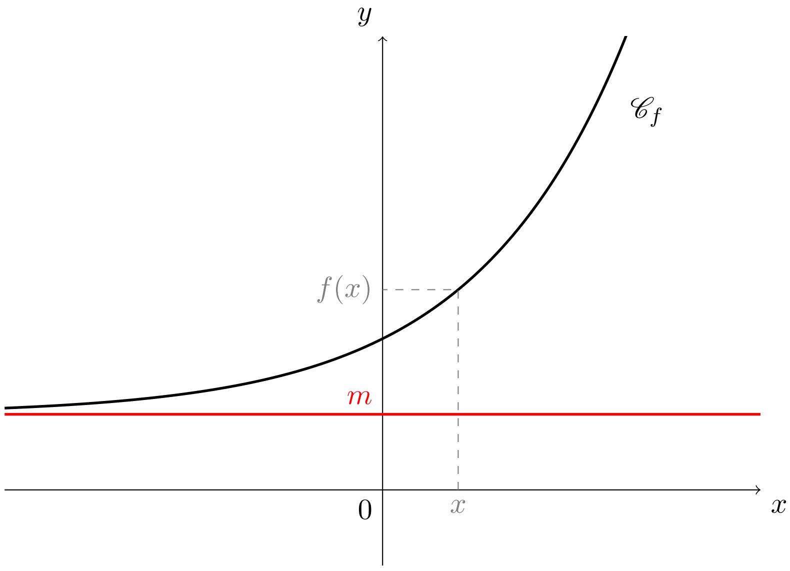
$$\text{il existe } m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant m.$$

La fonction f est dite **bornée** si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée.

Proposition. Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.



Graphe d'une fonction majorée



Graphe d'une fonction minorée

Extrema

On appelle **voisinage de** x_0 tout intervalle ouvert contenant x_0.

Définition. On dit que f admet un **maximum** $f(x_0)$ en x_0 si et seulement si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \leqslant f(x_0).$$

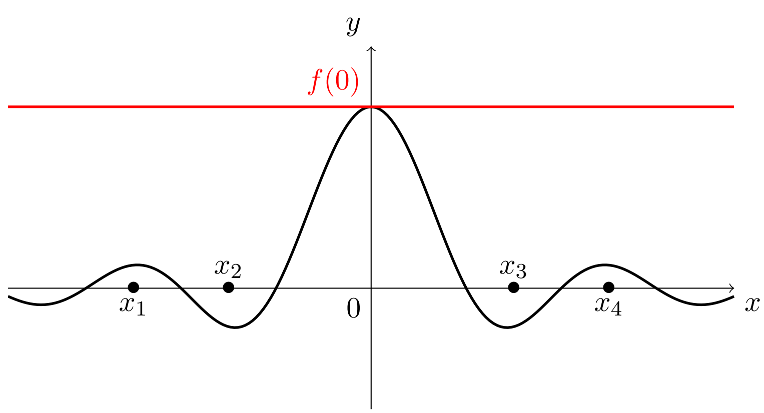
On dit que f admet un **minimum** $f(x_0)$ en x_0 si et seulement si

$$\forall x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x) \geqslant f(x_0).$$

On dit que f admet un **maximum local** (resp. **minimum local**) $f(x_0)$ en x_0 si et seulement si

il existe V un voisinage de x_0 tel que pour tout $x \in V, \quad f(x) \leqslant f(x_0)$
(resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

On appelle **extremum** (local) un maximum ou un minimum (local).



f admet un maximum global en 0 et un maximum local en x_4

Exercice 9. À l'aide d'un tableau de variations, déterminer les extrema de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1.5 Injection, surjection et bijection

Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I, J)$.

Définition. (f injective) $f : I \to J$ est une **injection** (ou est dite **injective**) si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2,\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

Définition. (f surjective) $f : I \to J$ est une **surjection** (ou est dite **surjective**)

si et seulement si tout élément de J admet un antécédent par f,

si et seulement si $\forall y \in J,\ \exists\ x \in I,\ y = f(x)$.

Définition. (f bijective) $f : I \to J$ est une **bijection** de I sur J (ou est dite **bijective**)

si et seulement si f est à la fois une injection et une surjection,

si et seulement si tout élément de J admet un unique antécédent par f,

si et seulement si $\forall y \in J,\ \exists!\ x \in I,\ y = f(x)$.

La fonction qui à $y \in J$ associe l'unique élément $x \in I$, tel que $y = f(x)$, est appelée **bijection réciproque de** f et notée f^{-1} :

$$f^{-1} \ : \ \begin{array}{ccl} J & \to & I \\ y & \mapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}.$$

Proposition. Soit $f \in \mathscr{F}(I, J)$ une bijection.

• $\forall x \in I,\ \forall y \in J$,

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y).$$

• $\forall x \in I$,

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

• $\forall y \in J$,

$$f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = y.$$

• $\forall (x_1, x_2) \in I^2$,

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2.$$

En pratique (et pour le moment), on utilisera le résultat suivant pour démontrer qu'une fonction est une bijection :

Théorème. (Théorème de la bijection)
Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$.

Ce théorème se généralise à des intervalles ouverts et semi-ouverts :

I	f strictement croissante	f strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$\left[f(a), \lim\limits_{b} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b} f, f(a)\right]$
$]a, b]$	$\left]\lim\limits_{a} f, f(b)\right]$	$\left[f(b), \lim\limits_{a} f\right[$
$]a, b[$	$\left]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f\right[$	$\left]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f\right[$

Méthodologie : Montrer qu'une fonction est bijective et déterminer l'expression de sa bijection réciproque

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
2. Donner une expression explicite f^{-1}.

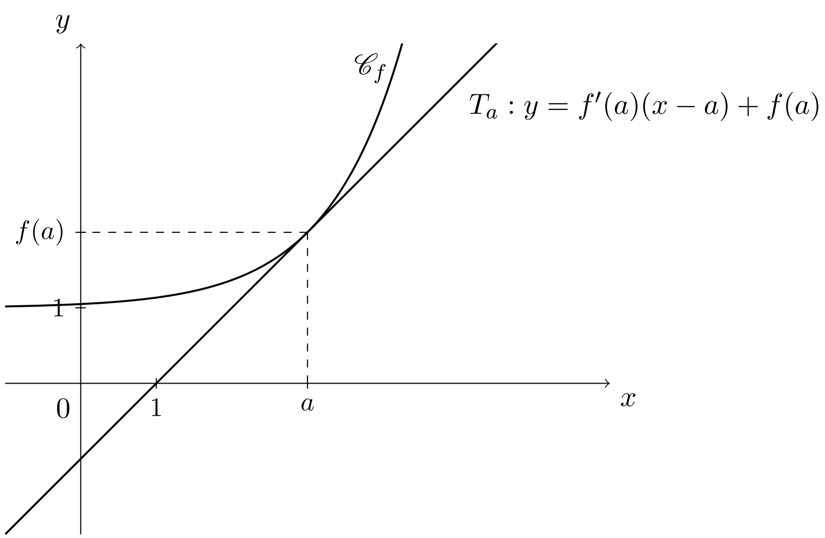
2 Dérivation

Définition. f **est dérivable en** a si et seulement si $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque x tend vers a, Dans ce cas, le **nombre dérivé de** f **en** a est

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$



Dérivées des fonctions usuelles (cf chapitre 3)

Dérivées et opérations (cf chapitre 3)

Rappel : Dérivée d'une composée

Soient u et f deux fonctions réelles dérivables.
On note D le domaine de dérivabilité de la fonction $f\circ u$. On a :

$$\forall x\in D,\quad (f\circ u)'(x)=u'(x)\times f'(u(x)).$$

Exercice 11. Déterminer la dérivée de la fonction $\varphi : x\to \tan(x^2+1)$ (sans se soucier du domaine de dérivabilité).

Sens de variation

Théorème. Soit $f : I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

f est constante sur $I \iff \forall x\in I,\ f'(x)=0.$

f est croissante sur $I \iff \forall x\in I,\ f'(x)\geqslant 0.$

f est décroissante sur $I \iff \forall x\in I,\ f'(x)\leqslant 0.$

f est strictement croissante sur I si et seulement si $f'(x)\geqslant 0$ sur I et la dérivée f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial.

f est strictement décroissante sur I si et seulement si $f'(x)\leqslant 0$ sur I et la dérivée f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial.

Exemple. La fonction $x\mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dérivée d'une fonction réciproque

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ une fonction continue et strictement monotone sur I. On sait (théorème de la bijection) que $f(I)$ est un intervalle, que l'on note J, et que f réalise une bijection de I sur J.

Théorème. Alors :

• la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone et de même sens de variation que f,

• les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (**la première bissectrice**)

• Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $x \in J$,

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.}$$

Exercice 12. Représentation graphique et dérivée de $\varphi : x \mapsto \sqrt[3]{x}$.

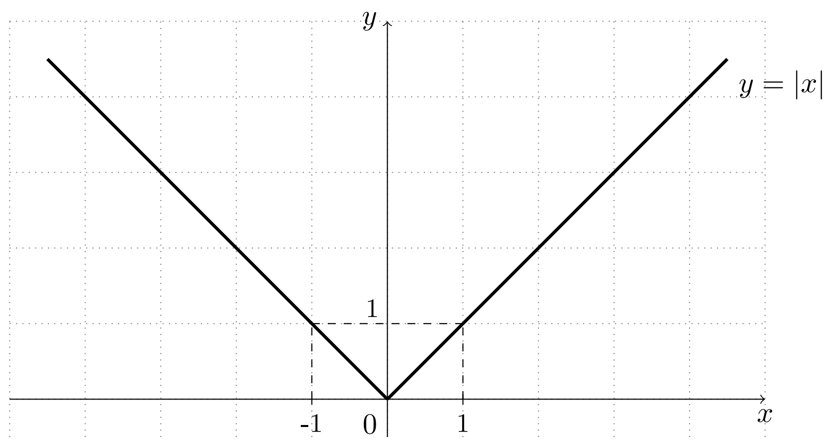
3 Fonctions usuelles

3.1 Valeur absolue

Définition. La valeur absolue d'un nombre réel est sa valeur numérique sans tenir compte de son signe.
Pour tout nombre réel x, la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$\begin{cases} |x| = x, & \text{si } x > 0 \\ |x| = -x, & \text{si } x < 0 \\ |x| = 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Remarque. $|x| = \max(x, -x)$.



3.2 Partie entière

Définition. La partie entière d'un réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier relatif n tel que

$$n \leqslant x < n + 1.$$

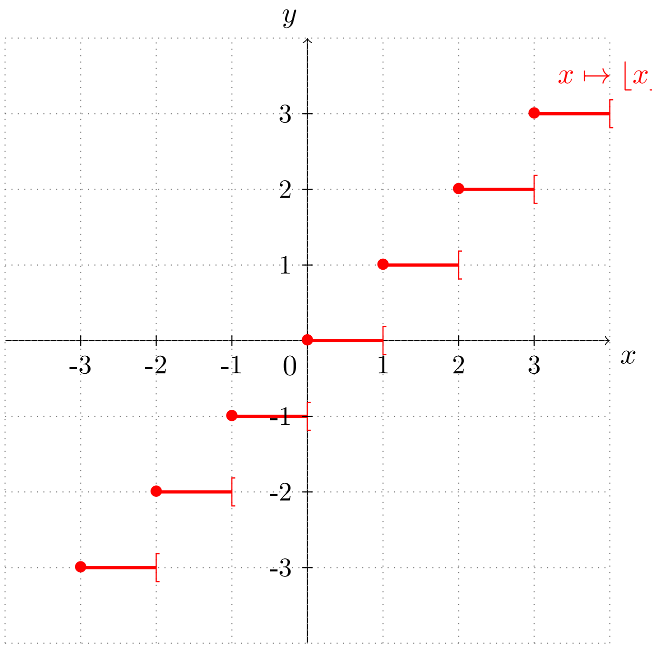
Exemple. $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$.

Proposition. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

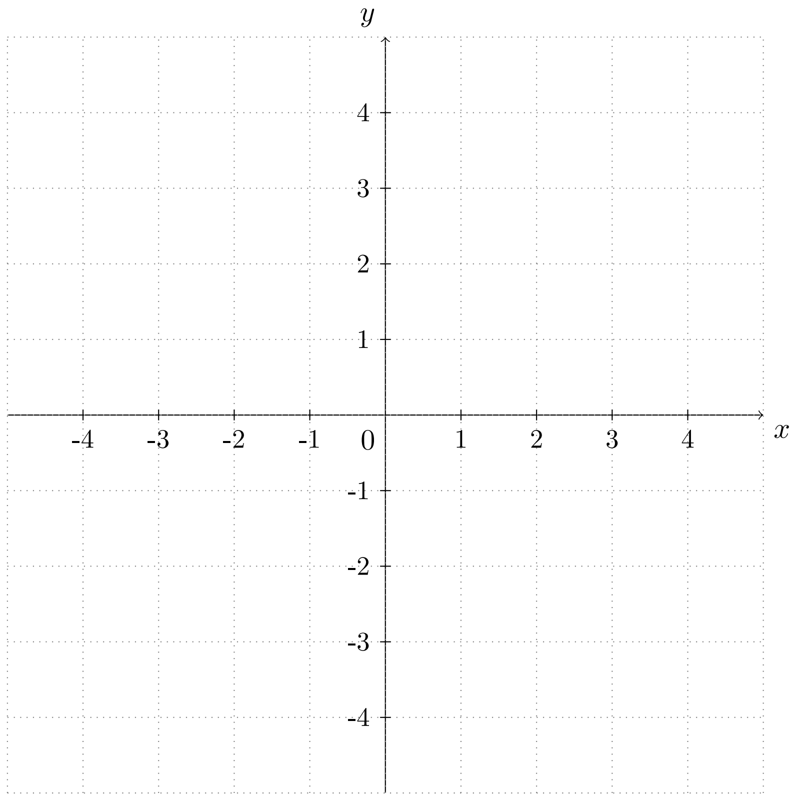
et

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$



C'est une fonction continue par morceaux.

Exercice 13. Représentation graphique de la fonction $x \mapsto \lfloor 2x+1 \rfloor$.



3.3 Fonctions exponentielle, logarithme népérien et puissances

Se référer au chapitre 3.

3.4 Fonctions circulaires et circulaires réciproques

Se référer au chapitre 3 pour les fonctions circulaires.

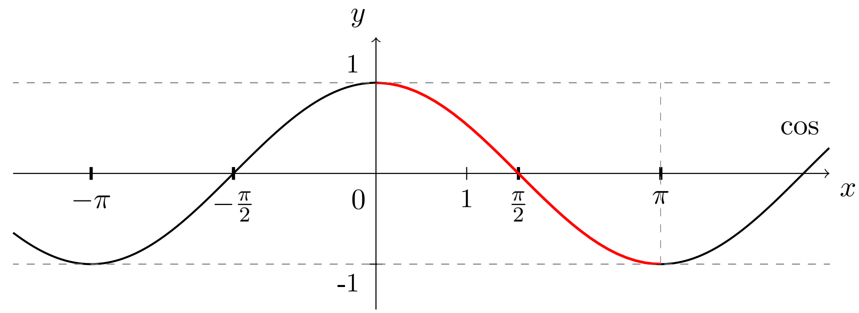
A. Arccosinus

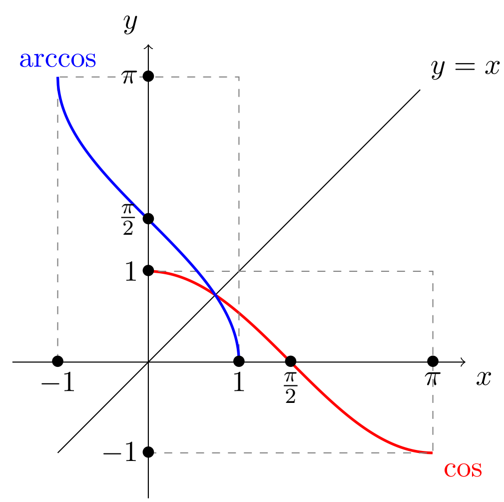
Considérons la fonction cosinus définie sur $\mathbb{R}$. Pour obtenir une bijection de cette fonction, il faut considérer la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$. Sur cette intervalle, la fonction cosinus est continue et strictement décroissante, donc la restriction

$$\cos_{\,|[0,\pi]} : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\arccos\ :\ [-1, 1] \to [0, \pi].$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\left(\arccos(x)\right) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\left(\cos(x)\right) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } x \in [0,\pi] \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos(y).}$$

Dérivée de arccos :

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[.}$$

Démonstration.

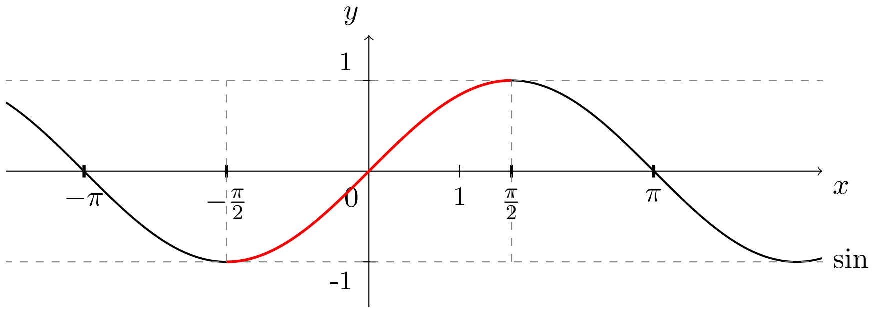
B. Arcsinus

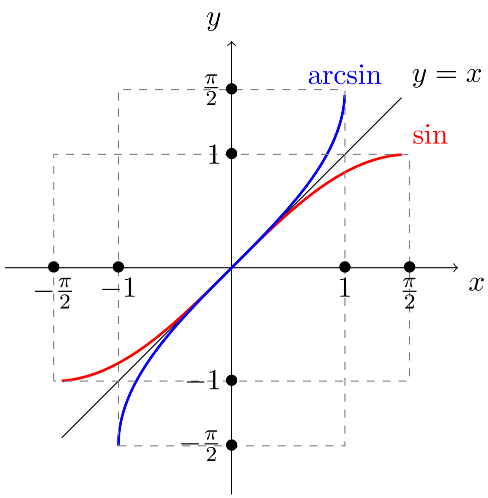
La restriction

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\arcsin\ :\ [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$





On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin(\arcsin(x)) = x & \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin(x)) = x & \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin(y).}$$

Dérivée de arcsin :

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[.}$$

Démonstration.

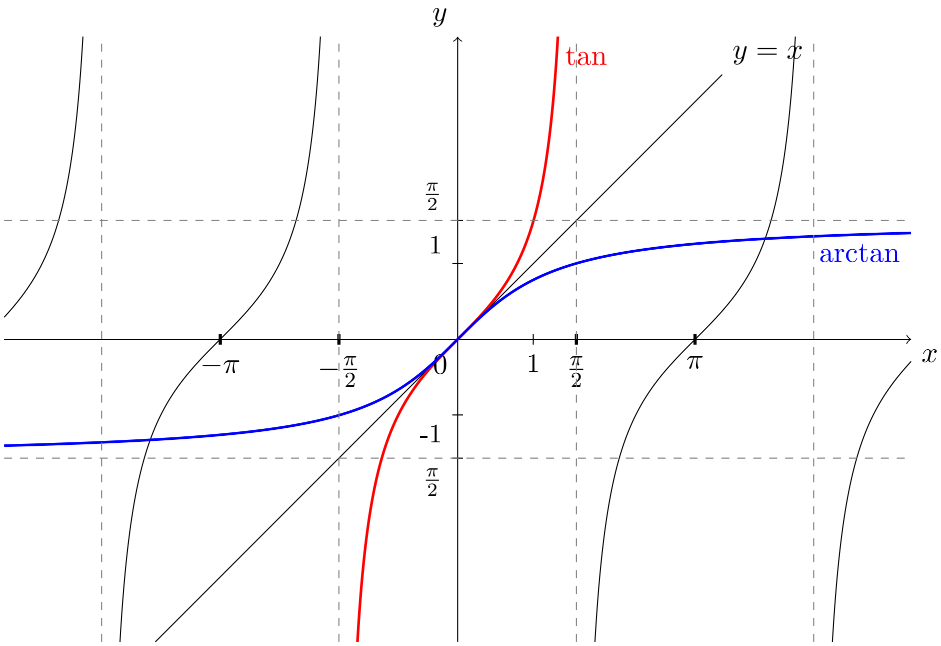
C. Arctangente

La restriction

$$\tan|_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} : \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to]-\infty,+\infty[$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[.$$



On a donc, par définition de la bijection réciproque :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan(\arctan(x)) & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) = x & \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\end{array}}$$

Autrement dit :

$$\boxed{\text{Si } x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \tan(x) = y \iff x = \arctan(y).}$$

Dérivée de arctan :

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Démonstration.