

Chapitre 8 : Géométrie élémentaire du plan

Un chapitre, un mathématicien

E L E M E N T.

Or est icy à noter que quand d'un angle de quelconque figure quadrilatere on tire vne ligne droite à l'angle opposé; cette ligne est appellée diametre par aucuns, & diagonalle par d'autres; ainsi au quadrilatere ABCD la ligne BD, menee de l'angle B à son opposé D est dite diagonalle, ou diametre.



35. Lignes droictes paralleles, sont celles qui estans sur vn mesme plan, & prolongées infiniment de part & d'autre ne se rencontrent iamais.

Afin que les lignes droictes soient dites paralleles, ou equidistantes, il ne suffit pas qu'estans prolongées infiniment de part & d'autre, elles ne viennent iamais à se rencontrer; mais il est aussi necessaire qu'elles soient en vne mesme superficie plane: Car plusieurs lignes droictes n'estans en vne mesme superficie, pourroient bien estre prolongées à l'infiny & ne se rencontrer iamais, lesquelles toutesfois ne seroient dites paralleles. Comme par exemple, si deux lignes droictes posées de traüers au milieu de l'air ne se touchent point, bien qu'elles soient prolongées tant qu'on voudra, elles ne se rencontreront iamais, & toutesfois elles ne seront pas dites paralleles. Parquoy les deux lig. droictes AB, & CD, lesquelles sont en vne mesme superficie plane, & qui estans prolongées à l'infiny tant de la part de A, C, que de B, D, ne se rencontrent iamais, seront dites lignes paralleles.



Or icy finissent les definitions du premier liure d'Euclide: Mais d'autant qu'en ce mesme liure est souuent parlé de parallelogramme, & de leurs complemens, lesquels Euclide n'a point définy, nous adjoüsterons icy leurs definitions.

À l'aube du troisième siècle avant Jésus-Christ, les mathématiques grecques sont à leur apogée. C'est à cette époque que la renommée d'Euclide se manifeste. On ne sait pratiquement rien de son existence. Sans doute d'origine grecque, probablement éduqué à Athènes, il s'installe à Alexandrie alors que Ptolémée I^{er} organise le Museum et fait de sa capitale le centre culturel du monde hellénistique. L'ouvrage

fondamental d'Euclide, intitulé *Les Éléments*, est en fait un manuel qui regroupe toutes les connaissances mathématiques de l'époque en géométrie métrique, coniques exceptées, et en théorie des nombre. *Les Éléments* se composent de treize livres qui souvent reprennent les découvertes faites par ses prédécesseurs. Les énoncés, les constructions et les démonstrations lui sont redevables, il est l'auteur de nombreux résultats nouveaux.

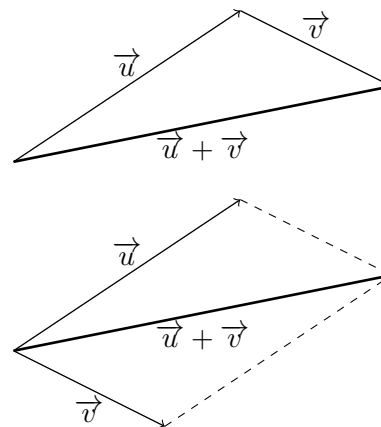
1 Repérage dans le plan

Dans ce chapitre, on notera \mathcal{P} l'ensemble des points du plan et $\vec{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

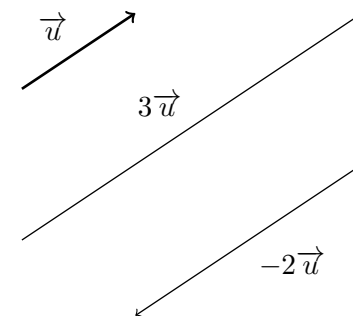
1.1 Rappels

L'ensemble $\vec{\mathcal{P}}$ des vecteurs du plan est muni d'une addition, notée $+$, et d'un produit par un réel, noté \cdot .

Addition vectorielle

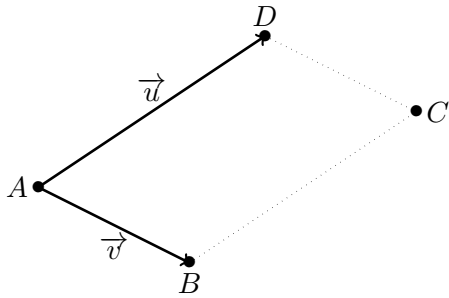


Produit d'un vecteur \vec{u} par un réel k



Translaté d'un point par un vecteur

Définition. Soient $M \in \mathcal{P}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$. Le translaté de M par \vec{u} est le point « extrémité » du vecteur \vec{u} lorsque l'on place son origine en M .
Notation : $M \oplus \vec{u}$.



1.2 Repère cartésien

Définition. (Base de $\vec{\mathcal{P}}$ - Coordonnées d'un vecteur)
On dit que deux vecteurs \vec{i}, \vec{j} de $\vec{\mathcal{P}}$ forment une **base de $\vec{\mathcal{P}}$** si et seulement si :

pour tout $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$, il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

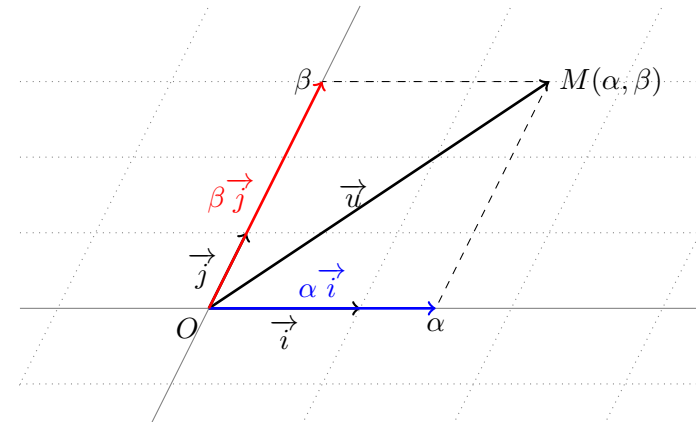
$$\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}.$$

On appelle **coordonnées de \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j})** le couple (α, β) .

Définition. (Repère de \mathcal{P} - Coordonnées d'un point)
Un **repère cartésien du plan** est la donnée d'un point O appelé **origine du repère** et d'une base (\vec{i}, \vec{j}) de $\vec{\mathcal{P}}$. On note (O, \vec{i}, \vec{j}) le repère associé. Soit $M \in \mathcal{P}$. Alors $\vec{OM} \in \vec{\mathcal{P}}$ et il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\vec{OM} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}.$$

On appelle **coordonnées de M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})** le couple (α, β) .



Proposition. Soient $(A, B) \in \mathcal{P}^2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$. On note

(x_A, y_A)	les coordonnées de	A	dans	(O, \vec{i}, \vec{j}) ,
(x_B, y_B)	les coordonnées de	B	dans	(O, \vec{i}, \vec{j}) ,
(u_1, u_2)	les coordonnées de	\vec{u}	dans	(\vec{i}, \vec{j}) ,
(v_1, v_2)	les coordonnées de	\vec{v}	dans	(\vec{i}, \vec{j}) .

Alors les coordonnées de :

- $\vec{u} + \vec{v}$ dans _____ sont _____
- $\lambda \vec{u}$ dans _____ sont _____
- \vec{AB} dans _____ sont _____
- $A \oplus \vec{u}$ dans _____ sont _____
- I dans _____ sont _____

où I est le milieu du segment $[AB]$.

Plan	Objets géométriques	\mathbb{R}^2	Notations dans \mathbb{R}^2
Point M	Coordonnées dans (O, \vec{i}, \vec{j})		
Vecteur \vec{u}	Coordonnées dans (\vec{i}, \vec{j})		
Cercle de centre O et de rayon 1	Ensemble de couples de \mathbb{R}^2		
Translation t de vecteur $\vec{i} + \vec{j}$	Expression analytique		

Identification du plan avec \mathbb{R}^2 .

1.3 Recherche des repères de \mathcal{P}

Caractérisation analytique des repères du plan.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On note (u_1, u_2) les coordonnées du vecteur \vec{u} dans (\vec{i}, \vec{j}) ,
 (v_1, v_2) les coordonnées du vecteur \vec{v} dans (\vec{i}, \vec{j}) .

Définition. On appelle **déterminant de (\vec{u}, \vec{v}) dans la base (\vec{i}, \vec{j})** et on note $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v})$ le réel suivant :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1.$$

Théorème. (\vec{u}, \vec{v}) est une base de $\vec{\mathcal{P}} \iff \det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$.

Caractérisation géométrique des bases.

Définition. Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont **colinéaires** si et seulement si il existe k un réel tel que

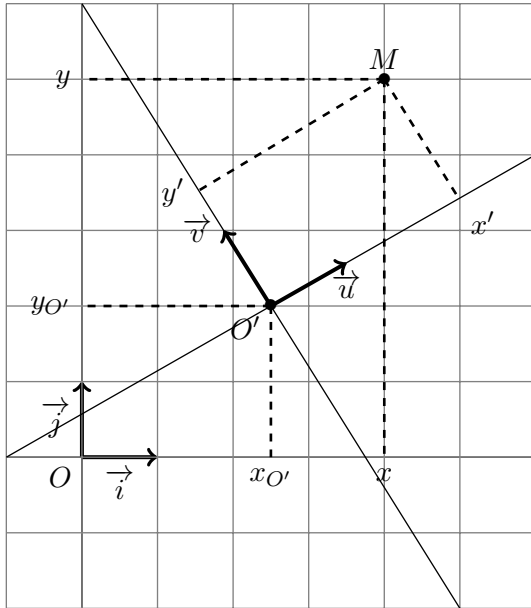
$$\vec{u} = k \vec{v} \text{ ou } \vec{v} = k \vec{u}.$$

Remarque. • Le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.

- Deux vecteurs colinéaires ont même direction.
- Les coordonnées de deux vecteurs colinéaires sont proportionnelles.

Théorème. (\vec{u}, \vec{v}) est une base de $\vec{\mathcal{P}} \iff \vec{u}$ et \vec{v} ne sont pas colinéaires.

1.4 Changement de repères



On considère deux repères distincts : $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point du plan.

On note

(x, y)	les coordonnées du point	M	dans \mathcal{R} ,
(x', y')	les coordonnées du point	M	dans \mathcal{R}' ,
$(x_{O'}, y_{O'})$	les coordonnées du point	O'	dans \mathcal{R} ,
(u_1, u_2)	les coordonnées du vecteur	\vec{u}	dans (\vec{i}, \vec{j}) ,
(v_1, v_2)	les coordonnées du vecteur	\vec{v}	dans (\vec{i}, \vec{j}) .

Alors :

$$\begin{cases} x = x_{O'} + x'u_1 + y'v_1 \\ y = y_{O'} + x'u_2 + y'v_2 \end{cases} .$$

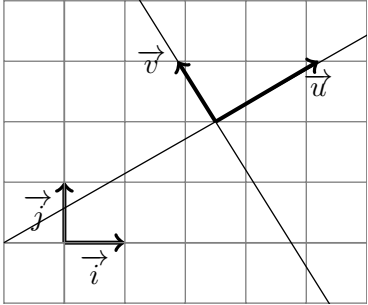
1.5 Orientation - Repère orthogonal - Repère orthonormal.

Orientation du plan.

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base de $\vec{\mathcal{P}}$.

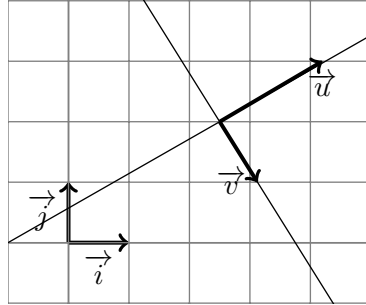
Une base (\vec{u}, \vec{v}) de $\vec{\mathcal{P}}$ est dite **de même orientation** que (\vec{i}, \vec{j}) si et seulement si

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) > 0.$$



Une base (\vec{u}, \vec{v}) de $\vec{\mathcal{P}}$ est dite **d'orientation contraire** à (\vec{i}, \vec{j}) si et seulement si

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) < 0.$$

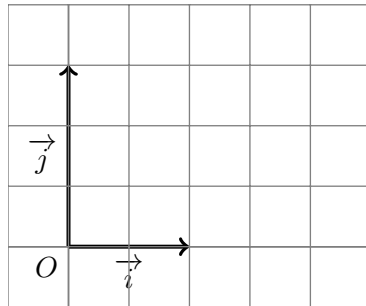


Orienter $\vec{\mathcal{P}}$ revient à choisir une base (\vec{i}, \vec{j}) de référence. Toute base de même orientation que (\vec{i}, \vec{j}) est dite **directe** et toute autre base est dite **indirecte**.

Repère orthogonal.

On dit que (O, \vec{i}, \vec{j}) est un **repère orthogonal** de \mathcal{P} si et seulement si :

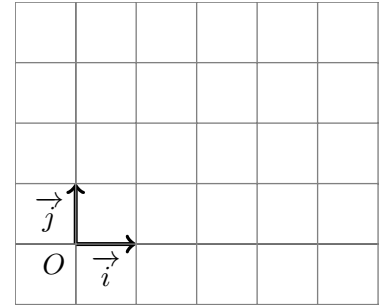
- (\vec{i}, \vec{j}) est une base de $\vec{\mathcal{P}}$
- $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \frac{\pi}{2}[\pi]$.



Repère orthonormé.

On dit que (O, \vec{i}, \vec{j}) est un **repère orthonormé** de \mathcal{P} si et seulement si :

- (\vec{i}, \vec{j}) est une base de $\vec{\mathcal{P}}$
- $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$
- $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \frac{\pi}{2}[\pi]$.



Repère direct.

On oriente $\vec{\mathcal{P}}$ en fixant une base de référence (\vec{i}, \vec{j}) .

On dit que (O, \vec{u}, \vec{v}) est un **repère direct** de \mathcal{P} si et seulement si :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) > 0.$$

Remarque. Le choix d'un repère orthonormal direct permet d'identifier le plan à \mathbb{C} .

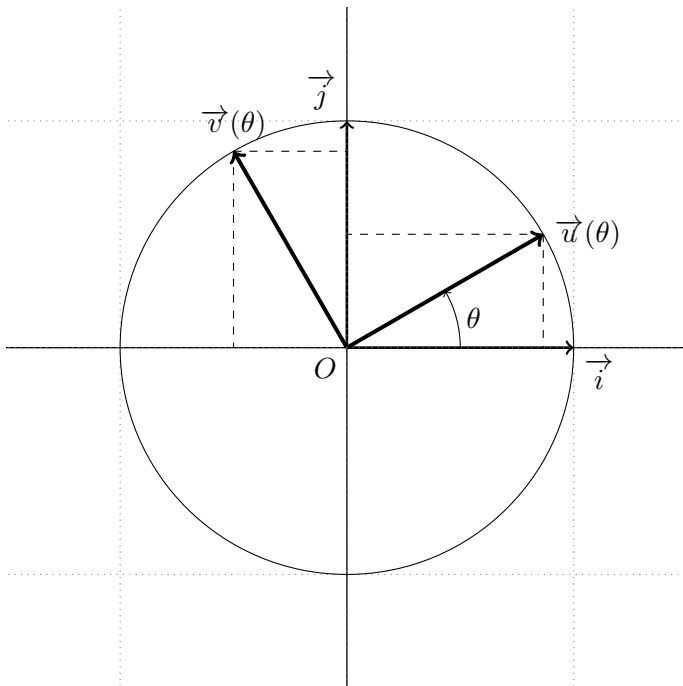
1.6 Repère polaire - Coordonnées polaires.

On munit \mathcal{P} d'un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition. (Repère polaire) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ l'image du repère (O, \vec{i}, \vec{j}) par la rotation de centre O d'angle θ : $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ est encore un repère orthonormal direct du plan. On l'appelle **repère polaire** attaché au réel θ .

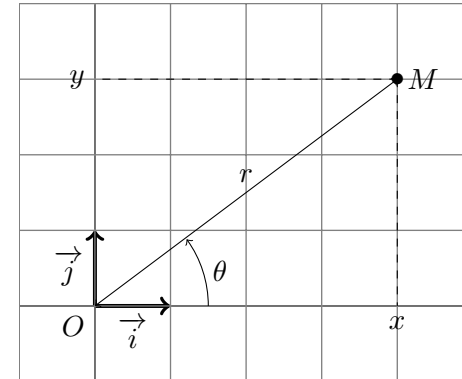
Pour tout réel θ , on a :

$$\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \\ \vec{v}(\theta) = \end{cases}$$



Définition. (Coordonnées polaires d'un point) Soit M un point de \mathcal{P} de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} . On dit que (r, θ) est un **couple de coordonnées polaires de M** si et seulement si

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}.$$



Remarque. Si $M \in \mathcal{P}$ a pour affixe $z \neq 0$, alors un couple de coordonnées polaires de M est donné par (r, θ) où r est le module de z et θ est un argument de z .

Remarque. Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires d'un point ne sont pas uniques : le point M de coordonnées polaires (r, θ) a aussi pour coordonnées polaires $(r, \theta + 2\pi)$ et $(-r, \theta + \pi)$.

Méthodologie : Passer des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes.

Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées polaires (r, θ) . Les coordonnées cartésiennes de M dans \mathcal{R} sont $(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exemple. Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées polaires $(-2, \frac{5\pi}{6})$. Les coordonnées cartésiennes de M dans \mathcal{R} sont

Méthodologie : Passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

Soit $M \in \mathcal{P}$ de coordonnées cartésiennes (x, y) dans \mathcal{R} . Un couple de coordonnées polaires de M est donné par (r, θ) où

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ et } \theta \text{ tel que } \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{r} \\ \sin \theta = \frac{y}{r} \end{cases} .$$

Exemple. Soit M un point de coordonnées $(1, 1)$ dans \mathcal{R} . Un couple de coordonnées polaires de M est

2 Produit scalaire

2.1 Présentation

Définition. (Produit scalaire) On appelle **produit scalaire** de \vec{u} et \vec{v} et on note

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{ou} \quad (\vec{u} | \vec{v}) \quad \text{ou} \quad \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

le réel défini par :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 & \text{si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}, \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où θ est une mesure de l'angle de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) .

Remarque.

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Théorème. \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux $\iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Notation : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Proposition. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\vec{\mathcal{P}})^3$.

1. Symétrie du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

2. Bilinearité du produit scalaire :

$$\begin{cases} (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w} \\ \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) & \text{et} & \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{cases}$$

Remarque. Grâce à ces deux propriétés (symétrie et bilinéarité), le produit scalaire se manipule « formellement » comme un produit usuel.

Exercice 1. Montrer que pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$,

1. $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$,
2. $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
3. $\|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$.

Interpréter le produit scalaire en termes de projection orthogonale.

Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de $\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{P}}$. On appelle θ une mesure de l'angle (\vec{i}, \vec{u}) .

Les coordonnées de \vec{u} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) sont $(\vec{u} \cdot \vec{i}, \vec{u} \cdot \vec{j})$.

2.2 Expression analytique

Théorème. On munit $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base **orthonormée** (\vec{i}, \vec{j}) .

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$.

On note (x, y) les coordonnées de \vec{u} dans (\vec{i}, \vec{j}) ,
 (x', y') les coordonnées de \vec{v} dans (\vec{i}, \vec{j}) .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'.$$

Démonstration.

Proposition. On munit $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base **orthonormée directe** (\vec{i}, \vec{j}) permettant d'identifier $\vec{\mathcal{P}}$ et \mathbb{C} . Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$. On note z l'affixe du vecteur \vec{u} et z' l'affixe du vecteur \vec{v} . Alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \operatorname{Re}(\bar{z}z').$$

Démonstration.

3 Déterminant dans une base orthonormée directe

On munit $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base **orthonormée directe** (\vec{i}, \vec{j}) .

Théorème. Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$ non nuls. On note θ une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) . Alors :

$$\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin \theta.$$

Démonstration.

Le déterminant d'un couple (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs dans une base orthonormale directe est **indépendant de la base orthonormale directe choisie**.

Ce déterminant est aussi appelé **produit mixte** de (\vec{u}, \vec{v}) et noté $[\vec{u}, \vec{v}]$.

Théorème. \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires $\iff [\vec{u}, \vec{v}] = 0$.

Proposition. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in (\vec{\mathcal{P}})^3$.

1. Antisymétrie du produit mixte :

$$[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$$

2. Bilinearité du produit mixte :

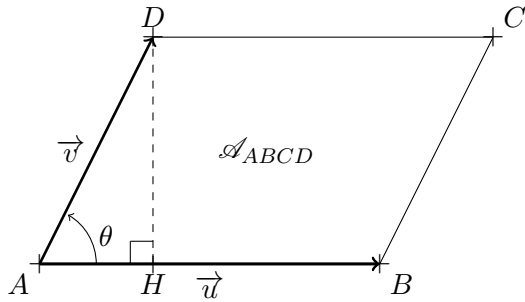
$$\begin{cases} [\lambda \vec{u}, \vec{v}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}] & \text{et} & [\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{w}] + [\vec{v}, \vec{w}] \\ [\vec{u}, \lambda \vec{v}] = \lambda [\vec{u}, \vec{v}] & \text{et} & [\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}, \vec{w}] \end{cases}$$

Proposition. On munit $\vec{\mathcal{P}}$ d'une base **orthonormée directe** (\vec{i}, \vec{j}) permettant d'identifier $\vec{\mathcal{P}}$ et \mathbb{C} . Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$. On note z l'affixe du vecteur \vec{u} et z' l'affixe du vecteur \vec{v} . Alors

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \text{Im}(\bar{z}z').$$

Interpréter un déterminant en termes d'aire d'un parallélogramme.

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\vec{\mathcal{P}})^2$ non colinéaires.



On appelle H le projeté orthogonal de D sur la droite (AB) . On note θ une mesure de l'angle (\vec{u}, \vec{v}) et \mathcal{A}_{ABCD} l'aire du parallélogramme $ABCD$.

Montrons que :

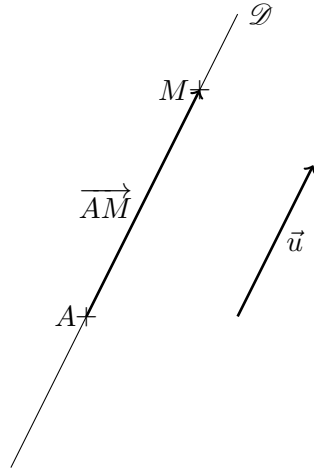
$$\mathcal{A}_{ABCD} = | [\vec{u}, \vec{v}] |$$

4 Droites

Définition. (Droite, Vecteur directeur)
Soient A un point et \vec{u} un vecteur non nul. La **droite** \mathcal{D} passant par A et de **vecteur directeur** \vec{u} est l'ensemble des points M pour lesquels il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{u}.$$

Tout vecteur non nul colinéaire à \vec{u} est appelé **vecteur directeur de la droite** \mathcal{D} .



4.1 Utilisation du produit scalaire et du déterminant

Le produit scalaire et le déterminant constituent deux outils essentiels pour exprimer que deux vecteurs $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ sont orthogonaux ou colinéaires :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

(dans une base orthonormale $xx' + yy' = 0$).

$$\vec{u} // \vec{v} \iff [\vec{u}, \vec{v}] = 0$$

(dans une base quelconque $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0$).

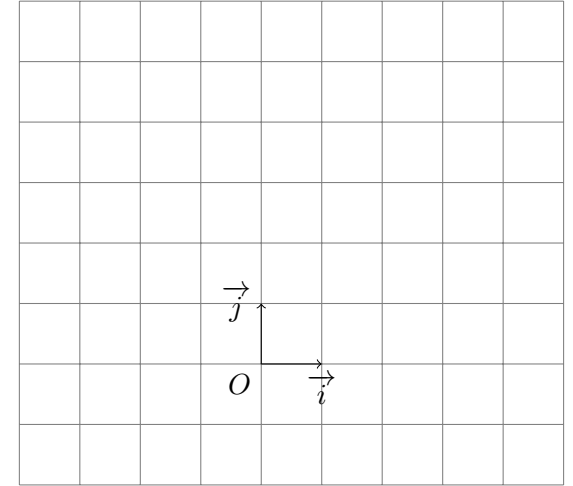
Remarque. A, B, C sont alignés si et seulement si $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$.

Projeté orthogonal d'un point sur une droite

On munit le plan \mathcal{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère les points $A(-1, 1)$, $B(3, -1)$, $C(1, 4)$.

Déterminer les coordonnées dans \mathcal{R} du point H projeté orthogonal de C sur la droite (AB) .



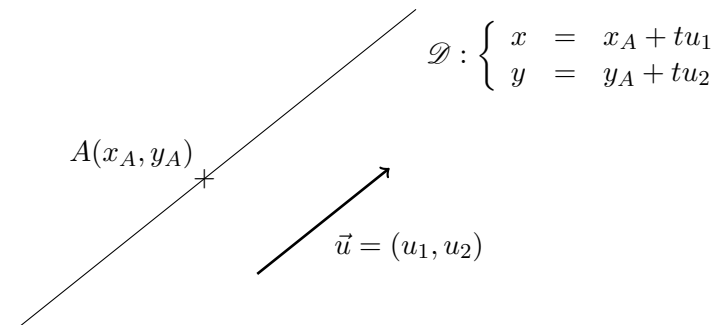
4.2 Représentation paramétrique d'une droite

On utilise cette représentation lorsque l'on connaît les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite étudiée.

Proposition. Soient $A = (x_A, y_A)$ un point et $\vec{u} = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul. La droite \mathcal{D} passant par A et dirigée par \vec{u} admet comme **représentation paramétrique** :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_A + tu_1 \\ y = y_A + tu_2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, tout système de cette forme représente une droite de \mathcal{P} , dont on connaît un point $A = (x_A, y_A)$ et un vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, u_2)$.



Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D} : y = 2x + 1$ est :

.....

Décrire l'ensemble $\mathcal{E} : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

.....

4.3 Équation cartésienne d'une droite

On travaille dans $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition. Si \mathcal{D} est une droite de \mathcal{P} , il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ et

$$ax + by + c = 0$$

soit une équation cartésienne de \mathcal{D} dans \mathcal{R} .

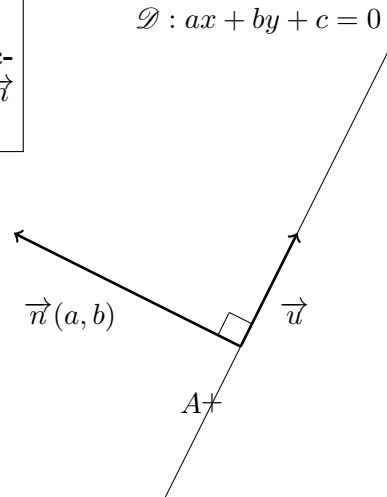
Réciproquement : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble des points de \mathcal{P} dont une équation cartésienne est $ax + by + c = 0$ est une droite dont un vecteur directeur est $\vec{u} = (-b, a)$.

Méthodologie : Passer d'une représentation cartésienne à une représentation paramétrique.

Méthodologie : Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne.

4.4 Droite définie par un point et un vecteur normal

Définition. (Vecteur normal)
Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} . On appelle **vecteur normal** à \mathcal{D} tout vecteur non nul \vec{n} orthogonal à un vecteur directeur de \mathcal{D} .



Proposition. On munit \mathcal{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient $A = (x_A, y_A)$ un point et $\vec{n} = (a, b)$ un vecteur non nul. Une équation cartésienne de la droite \mathcal{D} passant par A et de vecteur normal \vec{n} est

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0$$

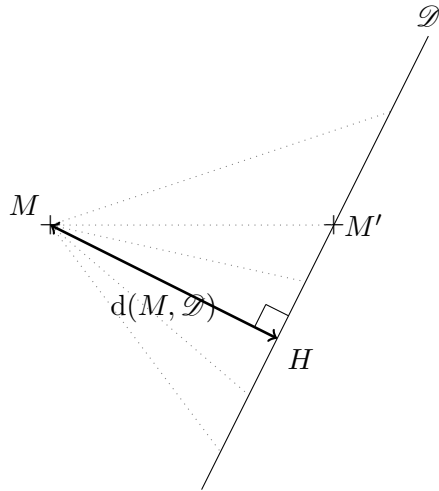
avec $c = -ax_A - by_A$.

Démonstration.

Méthodologie : Déterminer une équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal.

4.5 Distance d'un point à une droite

Définition. Soient \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} et M un point de \mathcal{P} . On appelle **distance de M à \mathcal{D}** et on note $d(M, \mathcal{D})$ la plus petite distance entre M et un point de \mathcal{D} .



Proposition. Soient \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} et M un point de \mathcal{P} . Soit H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{D} . Alors

$$d(M, \mathcal{D}) = MH.$$

Théorème. On munit \mathcal{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient

$$\mathcal{D} : ax + by + c = 0$$

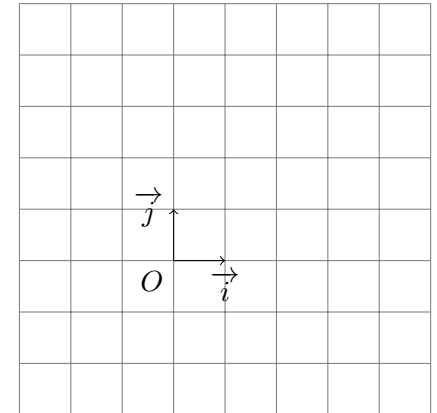
une droite de \mathcal{P} et $M(x_M, y_M)$ un point de \mathcal{P} . Alors

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Exercice 2. On considère le point $M(4, 2)$ et la droite \mathcal{D} passant par $A(1, 1)$ dirigée par le vecteur $\vec{u} = (3, -2)$.

Déterminer et représenter $d(M, \mathcal{D})$.

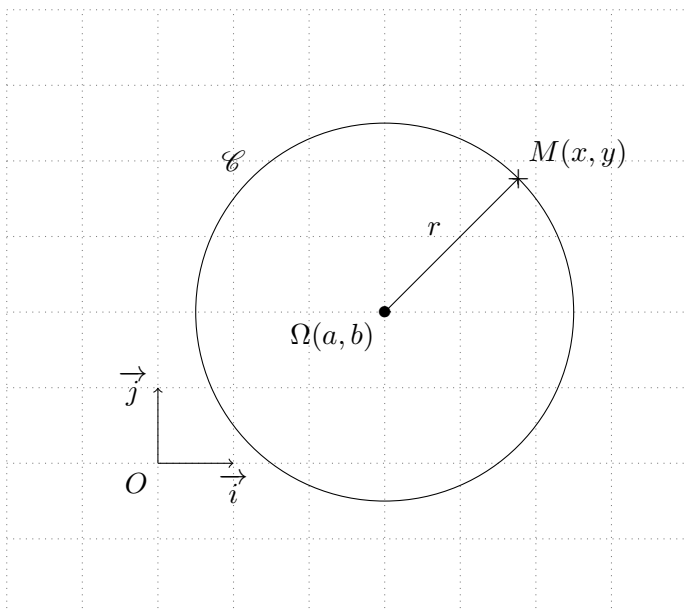
Indication : On commencera par déterminer une équation cartésienne de \mathcal{D} .



5 Cercles

Définition. Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $r > 0$. On appelle **cercle de centre Ω et de rayon r** l'ensemble des points M tels que

$$\Omega M = r.$$



5.1 Équation cartésienne d'un cercle

On munit \mathcal{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition. Une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$ est :

$$\mathcal{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Proposition. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On note \mathcal{A} l'ensemble des points de \mathcal{P} dont une équation cartésienne est $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Alors \mathcal{A} est un cercle, un point ou le vide.

Démonstration.

Exemple. Décrire l'ensemble des points \mathcal{A} de \mathcal{P} dont une équation cartésienne est :

1. $x^2 + y^2 - x - 2y - 5 = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0$.
3. $x^2 + y^2 + 4x + 5 = 0$.

5.2 Cercle défini par son diamètre

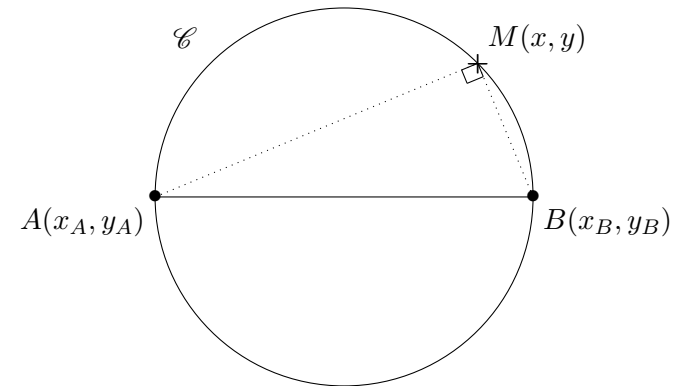
Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points distincts de \mathcal{P} .

Proposition. On considère \mathcal{C} le cercle de diamètre $[A, B]$. Alors :

$$M \in \mathcal{C} \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Une équation cartésienne du cercle \mathcal{C} est donc

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0.$$



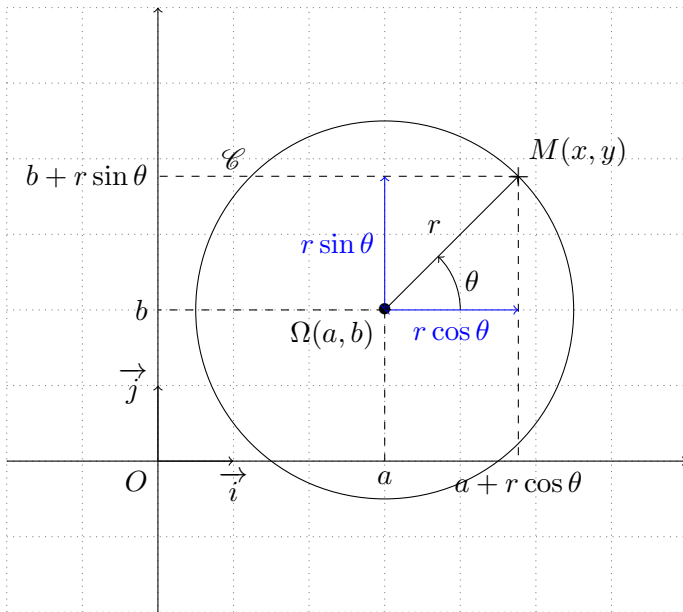
Démonstration.

5.3 Représentation paramétrique d'un cercle

On munit \mathcal{P} d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.

Proposition. Le cercle \mathcal{C} de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon $r > 0$ admet comme représentation paramétrique

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = a + r \cos \theta \\ y = b + r \sin \theta \end{cases}, \theta \in \mathbb{R}.$$

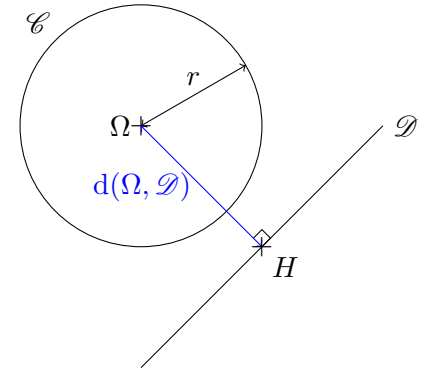


5.4 Intersection d'un cercle et d'une droite

Proposition. Soient $\Omega \in \mathcal{P}$ et $r > 0$. On appelle \mathcal{C} le cercle de centre Ω et de rayon r . Soit \mathcal{D} une droite de \mathcal{P} .

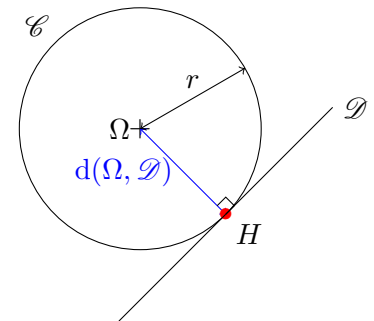
Si $d(\Omega, \mathcal{D}) > r$, alors

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset.$$



Si $d(\Omega, \mathcal{D}) = r$, alors

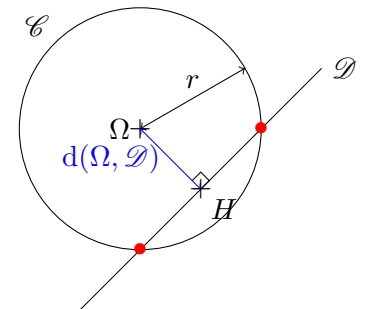
$$\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \{H\},$$



où H est le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{D} .

Si $d(\Omega, \mathcal{D}) < r$, alors

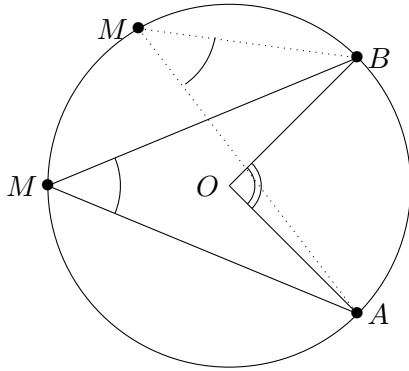
$\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ est une paire de points.



5.5 Cercles et angles

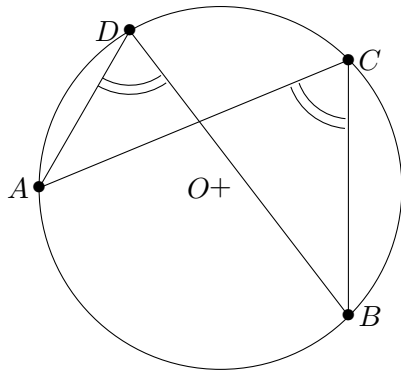
Proposition. Si A, B et M sont trois points d'un cercle de centre O tels que $M \neq A$ et $M \neq B$, alors :

$$(\widehat{\vec{OA}, \vec{OB}}) = 2(\widehat{\vec{MA}, \vec{MB}}) [2\pi].$$



Théorème. Quatre points distincts A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si

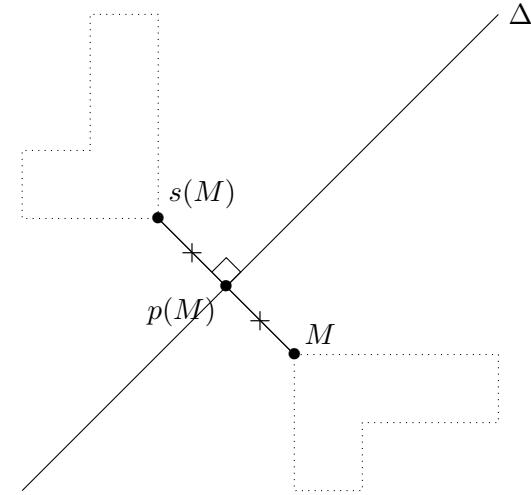
$$(\widehat{\vec{CA}, \vec{CB}}) = (\widehat{\vec{DA}, \vec{DB}}) [\pi]$$



6 Projection et réflexion

Définition. Soit Δ une droite de \mathcal{P} . On appelle **réflexion d'axe Δ** la symétrie orthogonale par rapport à la droite Δ .

Point de vue géométrique



Point de vue analytique - Identification du plan avec \mathbb{R}^2 .

Soient $A = (0, 1)$ un point et $\vec{u} = (1, 1)$ un vecteur. On note Δ la droite passant par A et dirigée par \vec{u} . On note s la réflexion d'axe Δ .

Soit $M = (x_M, y_M)$ un point. On note $M' = (x_{M'}, y_{M'})$ l'image du point M par s .

1. Déterminer une équation de la droite \mathcal{D} , perpendiculaire à Δ passant par M .
2. Déterminer les coordonnées de H , projeté orthogonal de M sur Δ .
3. En remarquant que H est le milieu du segment $[MM']$, déterminer les coordonnées de M' , en fonction de celles de M et des données de l'énoncé. En déduire une expression analytique de s .