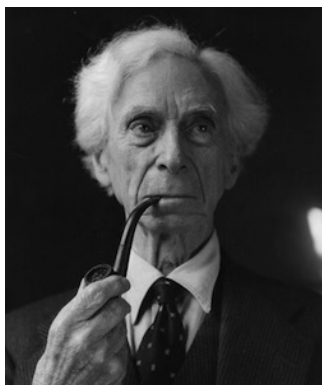


## Chapitre 9 : Logique et ensembles

### Un chapitre, un mathématicien



Bertrand Russell  
(1872-1970)

Bertrand Arthur William Russell est un mathématicien, logicien, philosophe, épistémologue, homme politique et moraliste britannique. Il est considéré comme le fondateur de la logique moderne.

À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, le besoin de faire reposer les mathématiques sur des fondations solides se fait sentir. Cantor élabore la théorie des ensembles : un ensemble regroupe des objets qui vérifient une propriété donnée. En 1902, dans cette théorie « naïve » des ensembles, Russell décèle une contradiction. En voici

une version populaire, connue sous le nom de *paradoxe du barbier* :

Sur l'enseigne du barbier du village, on peut lire :

« *Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là.* »

Savez-vous qui rase le barbier ?

**Suggestion de lecture :** *Logicomix* (Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, Alecos Papadatos, Annie di Donna – Vuibert – 2010)

### 1 Logique

#### ► Proposition-Assertion

**Définition.** Une **proposition**, ou **assertion**, est un énoncé mathématique complet qui est soit vrai, soit faux.

**Exemple.** « Le carré d'un nombre réel est positif » est une assertion vraie. « Tout nombre premier est un entier impair » est une assertion fausse.

On peut, à partir d'une ou de plusieurs propositions, construire de nouvelles propositions.

Soient  $P$  et  $Q$  deux propositions.

#### ► Équivalence : $P \Leftrightarrow Q$

**Définition.** La proposition «  $P \Leftrightarrow Q$  » est vraie quand les propositions  $P$  et  $Q$  sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

**Exemple.** L'équivalence  $(x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ou } x = -1)$  se lit «  $x^2 = 1$  si et seulement si  $x = 1$  ou  $x = -1$  ».

► **Négation** :  $\bar{P}$

**Définition.** La proposition  $\bar{P}$  est vraie quand  $P$  est fausse et elle est fausse quand  $P$  est vraie.

$P$	$\bar{P}$
V	F
F	V

**Exemple.** La négation de  $x > 1$  est  $x \leq 1$  :

$$\overline{x > 1} \iff x \leq 1.$$

*Remarque.* La négation d'une inégalité stricte est une inégalité large, et celle d'une inégalité large est une inégalité stricte.

► **Conjonction** : «  $P$  et  $Q$  »

**Définition.** La conjonction de deux propositions  $P$  et  $Q$ , notée «  $P$  et  $Q$  », est vraie si les deux propositions sont simultanément vraies, et fausse sinon.

$P$	$Q$	$P$ et $Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

**Exemple.** La conjonction « 3 est un nombre premier ET  $\sqrt{2}$  est un entier » est une proposition fausse.

► **Disjonction** : «  $P$  ou  $Q$  »

**Définition.** La disjonction de deux propositions  $P$  et  $Q$ , notée «  $P$  ou  $Q$  », est vraie quand l'une des propositions est vraie, et est fausse quand les deux sont simultanément fausses.

$P$	$Q$	$P$ ou $Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

**Exemple.** La disjonction « 3 est un nombre premier OU  $\sqrt{2}$  est un entier » est une proposition vraie.

► **Implication** :  $P \Rightarrow Q$

**Définition.** La proposition «  $P \Rightarrow Q$  » est vraie quand  $P$  est fausse ou  $Q$  est vraie.

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

**Exemple.** L'implication «  $n^2$  impair  $\Rightarrow n$  impair » se lit « **si**  $n^2$  est impair, **alors**  $n$  est impair ».

**Théorème.**

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$$

**Démonstration.**

$P$	$Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \text{ ou } Q$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Donc  $(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{P} \text{ ou } Q)$ .

### Vocabulaire

L'implication  $P \Rightarrow Q$  peut se lire « si la proposition  $P$  est vraie, alors la proposition  $Q$  est vraie ». Ainsi :

- pour que  $P$  soit vraie, il faut que  $Q$  soit vraie : on dit que  $Q$  est une **condition nécessaire** à  $P$  ;
- pour que  $Q$  soit vraie, il suffit que  $P$  soit vraie : on dit que  $P$  est une **condition suffisante** à  $Q$ .

**Exemple.** «  $ABCD$  est un parallélogramme » est une condition nécessaire à «  $ABCD$  est un losange », mais la condition n'est pas suffisante.

«  $ABCD$  est un carré » est une condition suffisante à «  $ABCD$  est un losange ».

Lorsqu'une condition est à la fois nécessaire et suffisante, on parle de **condition nécessaire et suffisante** (CNS). On utilisera alors la formule « si et seulement si ».

**Définition.** La **réciproque** de la proposition  $P \Rightarrow Q$  est

$$Q \Rightarrow P.$$

**Exemple.** D'après le théorème de Pythagore :

**Théorème** – Si un triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ , alors  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ .

L'implication réciproque est également vraie :

**Réciproque du théorème de Pythagore** – Si  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , alors le triangle  $ABC$  est rectangle en  $C$ .

### ► Contraposée de $P \Rightarrow Q$

**Définition.** La contraposée de l'implication  $P \Rightarrow Q$  est :

$$\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}.$$

**Exemple.** La contraposée de  $(n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair})$  est .....

.....

**Théorème.**

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$$

**Démonstration.** .....

.....

► **Quantificateurs**

- $\forall$  se lit « pour tout » ou « quel que soit »,
- $\exists$  se lit « il existe »,
- $\exists!$  se lit « il existe un unique ».

Soient  $E$  un ensemble et  $P(x)$  une proposition contenant la variable  $x$ .

- La proposition «  $\forall x \in E, P(x)$  » signifie que tout élément  $x$  de  $E$  vérifie la proposition  $P(x)$ .
- La proposition «  $\exists x \in E, P(x)$  » signifie qu'il existe au moins un élément  $x$  de  $E$  qui vérifie la proposition  $P(x)$ .

**Exemple.** La proposition «  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$  » se lit .....

.....

La proposition «  $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 2$  » se lit .....

.....

La proposition «  $\exists! x \in \mathbb{R}^+, x^2 = 2$  » se lit .....

.....

► **Négation d'une proposition**

<p><b>Théorème.</b></p> $\frac{\overline{P \text{ ou } Q}}{P \text{ et } Q} \iff \begin{matrix} (\overline{P} \text{ et } \overline{Q}) \\ (\overline{P} \text{ ou } \overline{Q}) \end{matrix}$
--

**Exemple.** La négation de l'assertion «  $(x = 0)$  ou  $(x \geq 1)$  » est .....

.....

La négation de l'assertion «  $1 \leq x \leq 2$  » est .....

.....

<p><b>Théorème.</b> La négation de <math>P \Rightarrow Q</math> est « <math>P</math> et <math>\overline{Q}</math> » :</p> $\overline{P \Rightarrow Q} \iff (P \text{ et } \overline{Q})$
--

**Exemple.** La négation de l'assertion «  $x \geq 2 \Rightarrow (x^2 + 1 \geq 5)$  » est .....

.....

La négation de l'assertion «  $n$  est pair  $\Rightarrow (n + 1)$  est impair » est .....

.....

► **Négation d'une proposition avec quantificateurs**

<p><b>Théorème.</b></p> $\frac{\overline{\forall x \in E, P(x)}}{\exists x \in E, P(x)} \iff \begin{matrix} \exists x \in E, \overline{P(x)} \\ \forall x \in E, \overline{P(x)} \end{matrix}$
--

**Exemple.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Que signifie «  $f$  est nulle » ? Nier cette assertion. ....

.....

.....

Que signifie «  $f$  s'annule » ? Nier cette assertion. ....

.....

## 2 Ensembles

### 2.1 Ensembles usuels

- $\mathbb{N}$ , ensemble des entiers naturels :

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

- $\mathbb{Z}$ , ensemble des entiers relatifs :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

- $\mathbb{D}$ , ensemble des nombres décimaux :

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

- $\mathbb{Q}$ , ensemble des rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

- $\mathbb{R}$ , ensemble des nombres réels :

$$\mathbb{R} = ]-\infty, +\infty[.$$

- $\mathbb{R}_+$ , ensemble des nombres réels positifs ou nuls :

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[.$$

- $\mathbb{R}_-$ , ensemble des nombres réels négatifs ou nuls :

$$\mathbb{R}_- = ]-\infty, 0]$$

- $\mathbb{C}$ , ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + ib, a \in \mathbb{R} \text{ et } b \in \mathbb{R}\}.$$

- $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^*, \mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*, \mathbb{C}^*$ , ensembles privés de zéro :

$$\mathbb{R}_+^* = ]0, +\infty[.$$

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ .

Certains nombres réels ne sont pas rationnels. Ces nombres sont appelés **nombres irrationnels**. Par exemple :  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  et  $e$  sont irrationnels.

### 2.2 Ensembles, éléments et sous-ensembles

On ne définit pas réellement la notion d'ensemble. C'est un objet auquel peut *appartenir* ou *ne pas appartenir* un autre objet.

- Soit  $E$  un ensemble. On note :

$x \in E$  pour «  $x$  appartient à  $E$  » et

$x \notin E$  pour «  $x$  n'appartient pas à  $E$  ».

On appelle **élément** de l'ensemble  $E$  un objet qui appartient à  $E$ .

- Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On dit que  $F$  est **inclus** dans  $E$ , et on note  $F \subset E$ , si tout élément de  $F$  est élément de  $E$ . On dit aussi que  $F$  est un **sous-ensemble** ou une **partie** de  $E$ .

- On appelle **ensemble vide**, et on note  $\emptyset$ , l'ensemble qui n'a aucun élément.

- Un ensemble qui possède un unique élément est appelé **singleton**. Il ne faut pas confondre l'élément  $x$  et le singleton  $\{x\}$ .

*Remarque.* L'appartenance est une relation qui lie un élément et un ensemble ; l'inclusion est une relation qui lie deux ensembles :

élément  $\in$  ensemble et ensemble  $\subset$  ensemble .

**Exemple.** Compléter les assertions suivantes :

1	.....	$\mathbb{N}$
{1}	.....	$\mathbb{N}$
-1	.....	$\mathbb{N}$
$\mathbb{N}$	.....	$\mathbb{Z}$
$\emptyset$	.....	$\mathbb{N}$

### 2.3 Produit cartésien

**Définition.** Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On peut définir le **produit cartésien** de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$  : il s'agit de l'ensemble des couples  $(x, y)$  tels que  $x$  est élément de  $E$  et  $y$  élément de  $F$ .

**Exemple.** La notation  $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$  signifie .....

La notation  $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  signifie .....

La notation  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  signifie .....

### 2.4 Ensemble des parties d'un ensemble

**Définition.** Tous les sous-ensembles d'un ensemble  $E$  constituent un nouvel ensemble, appelé **ensemble des parties** de  $E$  et noté  $\mathcal{P}(E)$ .

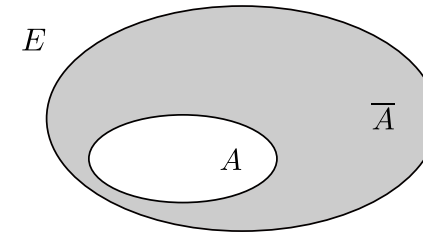
**Exemple.** Soit  $E = \{1, 2, 3\}$ . Décrire  $\mathcal{P}(E)$ .

#### Opérations dans $\mathcal{P}(E)$ :

Soient  $E$  un ensemble et  $A, B \subset E$ .

► **Complémentaire** :  $C_E(A)$ , noté aussi  $\bar{A}$

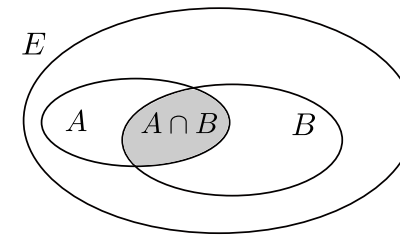
$$x \in \bar{A} \iff x \in E \text{ et } x \notin A$$



**Exemple.**  $x \in \overline{[1, +\infty[} \iff$  .....

► **Intersection** :  $A \cap B$

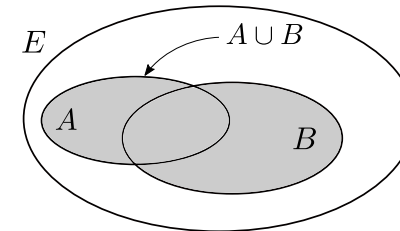
$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$



**Exemple.**  $x \in [1, +\infty[ \cap ]-\infty, 2]$   $\iff$  .....

► **Réunion** :  $A \cup B$

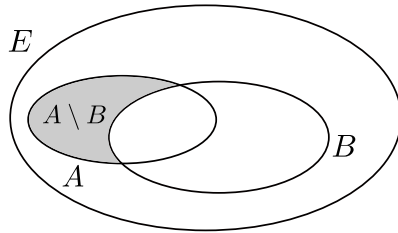
$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$



**Exemple.**  $x \in [1, 3[ \cup ]2, 4]$   $\iff$  .....

► **Différence** :  $A \setminus B$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B$$



**Exemple.**  $x \in ]2, 4] \setminus [1, 3[ \iff \dots\dots\dots$

### 3 Démonstration : méthodes

► **Raisonnement par implication :**

**Exercice 1.** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $(x > 2 \implies x^2 > 1)$ .

► **Raisonnement par équivalence :**

**Exercice 2.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Montrer que :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 \iff (a = 0 \text{ ou } b = 0).$$

**Exercice 3.** Montrer que, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

► **Raisonnement par l'absurde :**

Pour prouver qu'une proposition  $P$  est vraie, on montre que la proposition  $\overline{P}$  est fausse. En pratique, on suppose que  $P$  est fausse et on aboutit à une contradiction.

**Exemple issu de la vie courante.** Un de mes amis, qui s'appelle Pierre, m'avait dit : « Je passerai peut-être chez toi lundi après-midi. Si tu n'es pas là, je laisserai un mot dans la boîte aux lettres ». Or j'ai été obligé(e) de sortir lundi après-midi. En rentrant chez moi, je constate qu'il n'y a pas de mot dans la boîte aux lettres... Pierre est-il passé chez moi ce lundi après-midi ?

**Exemple.** On montre que  $\sqrt{2}$  n'est pas un rationnel en utilisant un raisonnement par l'absurde.

**Exercice 4.** On considère un rectangle d'aire  $170 \text{ m}^2$ . Montrer que sa longueur est supérieure à  $13 \text{ m}$ .

► **Contraposée :**

**Exercice 5.** Soit  $n \in \mathbb{Z}$ . On souhaite montrer que si  $n^2$  est impair, alors  $n$  est impair.

1. Quelle est la contraposée de cette implication ?
2. La démontrer.
3. Conclure.

► **Disjonction des cas :**

**Exercice 6.** Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , l'entier  $n(n + 1)$  est divisible par 2.

## ► Récurrence

Pour démontrer par récurrence la propriété  $P_n$ , où  $n$  est un entier naturel, on procède en trois étapes.

Étapes	Rédaction
On introduit $P_n$	Pour tout $n \in \mathbb{N}$ , on pose $P_n : (\dots)$
<u>Initialisation</u> : On vérifie $P_0$	$P_0$ est vraie car $(\dots)$
<u>Hérédité</u> : On vérifie $P_n \Rightarrow P_{n+1}$	Supposons $P_n$ vraie et montrons $P_{n+1}$ . $(\dots)$ donc $P_{n+1}$ est vraie.
<u>Conclusion</u>	Le principe de récurrence assure que <div style="border: 1px solid black; padding: 2px; display: inline-block;">pour tout <math>n \in \mathbb{N}</math>, <math>(\dots)</math></div>

**Exercice 7.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle telle que

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}. \end{cases}$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \frac{n}{n+1}$ .

## ► Analyse-Synthèse :

On procède en deux étapes.

**Analyse.** On détermine les **candidats**, hypothétiques solutions de l'équation, en raisonnant par implication.

**Synthèse.** On teste chacun des candidats obtenus en les injectant dans l'équation pour déterminer s'ils sont ou non des solutions.

**Exercice 8.** Déterminer les réels  $x$  tels que

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}.$$

**Exercice 9.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.